

ANDRÁS SZILÁRD                      BENCZE MIHÁLY  
CSAPÓ HAJNALKA    DÁVID GÉZA    KÉRY HAJNAL  
KOVÁCS BÉLA        NAGY ENIKŐ    NAGY ÖRS  
SZABÓ CSILLA        SZILÁGYI JUDIT  
ZSOMBORI GABRIELLA

I. ERDÉLYI MAGYAR ÁLTALÁNOS ISKOLÁK  
MATEMATIKAVERSENYE

Nagyvárad

Feladatok és megoldások

STÁTUS KIADÓ  
CSÍKSZEREDA, 2013

Műszaki szerkesztés: András Szilárd, Csapó Hajnalka  
Nagy Örs, Zsombori Gabriella

A kéziratot ellenőrizte és helyenként kiegészítette:  
dr. Lukács Andor, dr. Róth Ágoston, Madaras Beáta, Ugron Szabolcs, Kocsis Zsuzsánna

Kiadja a Státus Könyvkiadó  
Felelős kiadó Birtók József igazgató

Készült a Státus Nyomdában  
<http://www.status.com.ro>  
Email: [office@status.com.ro](mailto:office@status.com.ro)

Concursul de Matematică al Gimnaziilor Maghiare,  
ediția I (lb. magh.)

Editura Status, Miercurea-Ciuc  
Tiparul executat sub comanda nr. 3/2013  
la Status Printers - Siculeni

**STÁTUS**  
*printers*

# Tartalomjegyzék

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Előszó</b>                                | <b>4</b>  |
| <b>FELADATSOROK</b>                          | <b>6</b>  |
| V. osztály . . . . .                         | 6         |
| VI. osztály . . . . .                        | 8         |
| VII. osztály . . . . .                       | 10        |
| VIII. osztály . . . . .                      | 12        |
| <b>MEGOLDÁSOK</b>                            | <b>14</b> |
| V. osztály . . . . .                         | 14        |
| VI. osztály . . . . .                        | 26        |
| VII. osztály . . . . .                       | 36        |
| VIII. osztály . . . . .                      | 47        |
| <b>A javító tanárok névsora</b>              | <b>60</b> |
| <b>A versenyen részt vevő diákok névsora</b> | <b>61</b> |
| <b>Szervezők</b>                             | <b>67</b> |
| <b>A feladatok szerzőinek névjegyzéke</b>    | <b>68</b> |

## Előszó

A matematika csodálatos és különös valami, amit a művész hív életre a mindenség káoszából, lelki vívódások és gyötrelmek között. És nem adatott meg mindenkinek, hogy felismerje. Hogy megértse az ember, át kell élnie a művészet élményének isteni szikráját. A matematika rejtélyes szárnyain Bolyai Farkas a világhírű Gauss barátja elhozta Erdélybe ezt az isteni szikrát. Majd Farkas fiának Jánosnak adatott meg az a lehetőség, hogy a semmiből egy új világot teremtve Erdélyt a nemzetközi matematika élvonalába emelje.

Az Erdélyi Magyar Matematikaverseny (EMMV 9-12.) immár 23 éve rendezte, strukturálta a középiskolások matematikai versenyeit, és vele párhuzamosan kiépítette a tehetséggondozást is. Mindez beleilleszkedik a Kárpát-medencét átfogó Nemzetközi Magyar Matematikaverseny rendszerébe. Néhány éve a román tanügy minisztérium hivatalos versenye lett, ami sok szempontból megadta a finalitását. Évekig járva Erdély iskoláit, betekinthetem versenybizottsági tagként, elnökként a középiskola előtti matematika világába. A bennünk lévő gyermek az az énünk, amellyel kapcsolatunk létfontosságú, mert benne látjuk visszatükröződni lelkünk belső lényegének mély, gyönyörű és ártatlan voltát. Az élet felfedezés, ezért szabadítsuk fel magunkat és gondoljunk az életre úgy, mint egy felfedező útra. Néha hajlamosak vagyunk túl komolyan venni mindent, amit teszünk, és úgy érezzük, hogy minden lépésünkkel közelebb kell kerülnünk az áhított célhoz. Ha ehelyett úgy gondolunk az életre, mint egy felfedező útra, nyitottak leszünk arra, hogy mást is kipróbáljunk. Felfedezhetjük az előttünk álló lehetőségeket, feltárhatjuk lényünk sok-sok különböző rétegét. Ez a hozzáállás több lehetőséget teremt számunkra. Már az általános iskolában felfedezhetjük a matematika szépségeit. E felfedezés eredményességét a versenyeken elért pontszámok is meghatározzák, a dicsőség és kudarc érzése néha csak egy ponton múlik. De a matematika mélysége még évekig várát magára.

A 3-4. osztályos tanulókat országos szinten a Matematika Pontszerző Verseny rendezi családdá. Öt éve a marosvásárhelyi Bolyai Farkas Elméleti Líceum lett a házigazdája, immár a bukaresti tanügyminisztérium által is elismert országos döntőnek. Az 5-8. osztályosok részére sok import-verseny jelentette a tenni akarást, de értékesebbek voltak a hazai kezdeményezések,

mint a Bolyai János verseny, a Kisokosok versenye, a Radó Ferenc emlékverseny, a Vályi Gyula emlékverseny és a Csillagszerző verseny. A meghívásos alapon működő versenyek átfedik egymást, és nem elérhetőek minden tanár és tanuló számára. A szétforgácsolódás, valamint a saját tengelyük körül való forgás veszélye kimerítheti ezen versenyeket. Ezért volt szükséges egy letről felfelé való demokratikus elv szerinti építkezésre, egy olyan verseny elindítására, ami a fenti versenyeket is szervesen bevonja. Bukarestben, valamint Erdély 17 megyéjében megszerveztük a megyei selejtező versenyeket. Ez minden tanár és tanuló számára elérhető volt. Minden megyében kialakult egy szervező bizottság, amire a következő évek versenyei támaszkodnak. Most is mondom, jó lenne e megyei versenyeket elnevezni az illető megye valamelyik kiemelkedő, híres matematikusról. A megyei versenyeken továbbjutott majdnem kétszáz tanulónak ad otthont a nagyváradi Szacsвай Imre általános iskola, aki az I. Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematikaversenyét (EMMV 5-8.) szervezi az általános iskolák 5-8. osztályainak. Az itt résztvevő hatvan tanár számára pedig ez a verseny egy továbbképző szerepét is jelenti. Örvendetes, hogy az országos szakasz Szabó Csilla minisztériumi tanácsosnak köszönhetően, egyből a minisztérium hivatalos versenye lett. Reméljük, hogy ezen versennyel párhuzamosan a tehetséggondozást is elkezdhetjük. Folyamatosan építjük ezen verseny Kárpát-medencei kiterjesztését, létrehozva jövőre a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt (NMMV 5-8.) az általános iskolák 5-8. osztályainak. Ezzel az 5-8. osztályosok matematika-világát is strukturáljuk, megadva a finalitását.

Köszönjük Szabó Csilla minisztériumi tanácsosnak, Kéry Hajnal főtanfelügyelő helyettesnek, és Nagy Enikő tanárnőnek, hogy ezt az országos szakaszt Nagyváradon megszervezték.

Vagyok aki voltam, és leszek aki vagyok elv alapján, ha minden tanárnak és diáknak szívügye lesz ez a verseny, akkor Isten áldásával az erdélyi matematikának van jövője.

Dr. Bencze Mihály  
a versenybizottság alelnöke

## V. osztály

**1. Feladat.** Egy 63 elemű halmaz minden eleme természetes szám és elemeinek összege 2013. Mennyi az elemek szorzata?

Szilágyi Emőke, Marosvásárhely

**2. Feladat.** Öt egymást követő természetes szám esetén a páros és páratlan számok összege közötti különbség 86. Melyik ez az öt szám?

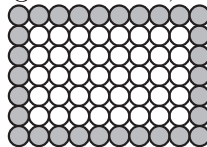
Nagy Jenő, Székelyudvarhely

**3. Feladat.** Jancsi egy doboz golyót egy szekrény fiókjába tesz úgy, hogy az első fiókba egy golyót tesz és minden további fiókba pontosan kétszer annyit, mint az előző fiókba (tehát a második fiókba két golyót, a harmadik fiókba négy golyót, a negyedik fiókba nyolc golyót és így tovább).

- Hány golyót tesz Jancsi a szekrénybe összesen, ha a szekrénynek 7 fiókja van?
- Jancsi édesapja találmásra kihúzott néhány fiókot és ezekben összesen 107 golyót talált. Melyik fiókokat húzta ki?

Pap Czier Levente, Nagykároly

**4. Feladat.** Valahány egyforma korongot az ábra szerint téglalap alakba rendeztünk el. A szegélyező korongokat szürkére festettük, a többi fehérre. Hány korongból állhat egy ilyen téglalap, ha ugyanannyi szürke korong van benne, mint amennyi fehér?



Róka Sándor, Nyíregyháza

**5. Feladat.** Egy régi típusú kenyérpirító egyszerre egy vagy két szelet kenyeret tud pirítani, de minden betett szeletnek csak az egyik oldalát. Egy oldal pirításához szükséges idő 50 másodperc, a szeleteket nem szabad túlsütni, egy szelet kivevéséhez, betevéséhez, megfordításához külön-külön 2 – 2 másodperc szükséges és egyszerre egy művelet hajtható végre (mindkét kézre szükség van egy szelet betevésénél, megfordításánál vagy kivevésénél). Legkevesebb mennyi idő alatt lehet megpirítani ezen a pirítón 3 szelet kenyér mindkét oldalát?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

**6. Feladat.** Egy kis skandináv faluban három egymás melletti házban három különböző nemzetiségű ember lakik. Minden háztulajdonos más-más állatot tart, illetve más-más a kedvenc étele, és igazak az alábbi állítások:

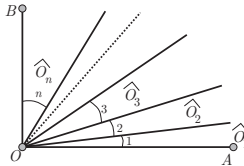
- A dán kedvenc étele a lazacsült.
- A középső házban kutyát tartanak.
- A zöld ház nem szomszédja a kék háznak.
- Aki tonhalat eszik, az első házban lakik.
- A zöld házzal szomszédos házban a finn lakik.
- Aki hörcsögöt tart, a kék házban lakik.
- A kék házban lakó embernek nem kedvenc étele a tonhal.
- A norvég szomszédjának kedvenc étele a rénszarvaspörkölt.

Ki tart macskát? Ki lakik a piros házban?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

## VI. osztály

**1. Feladat.** A mellékelt ábrán  $AO \perp OB$  és az  $\widehat{AOB}$  szöget néhány,  $O$ -ból induló félegyenessel úgy osztottuk fel, hogy a keletkező  $\widehat{O}_1, \widehat{O}_2, \widehat{O}_3, \dots, \widehat{O}_n$  szögek mértékszámai (fokban kifejezve) egymás utáni páros számok legyenek. Legtöbb hány félegyenest húzhattunk be?



Gagyai Dénes, Székelykeresztúr

**2. Feladat.** A 2013 egy olyan természetes szám, amelyben az első és a harmadik számjegy összege egyenlő a második és a negyedik számjegy összegével. Hány ilyen évszám van a 3. évezredben?

Durugy Erika, Torda

**3. Feladat.** Keress két olyan egymás utáni természetes számot, hogy mindkét szám számjegyeinek összege osztható legyen 5-tel! Melyek a legkisebb ilyen tulajdonsággal rendelkező számok? Hány ilyen számpár létezik 0 és 100000 között?

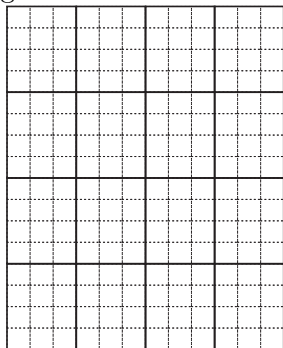
Róka Sándor, Nyíregyháza

**4. Feladat.** A 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számjegyek segítségével felírunk néhány olyan hétjegyű számot, amelyben minden felsorolt számjegy pontosan egyszer szerepel. Kiválaszthatunk-e ezek közül két olyan különböző számot, amelyek közül az egyik osztója a másiknak?

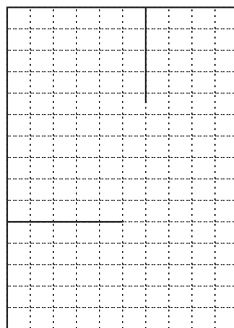
Bencze Mihály, Brassó



**5. Feladat.** A mellékelt ábra *a*) részén egy téglalaprács látható. Ez azt jelenti, hogy két rögzített  $m$  és  $n$  szám esetén egy téglalap szembenfekvő oldalpárjait  $m$ , illetve  $n$  egyenlő részre osztottuk fel és a megfelelő osztópontokat összekötöttük az oldalakkal párhuzamos szakaszok segítségével (ezek a rácsvonalak). Így egy  $m \times n$ -es téglalaprács keletkezik. Az *a*) ábrán egy  $4 \times 4$ -es téglalaprács látható, amelynek a mérete  $12 \times 16$ , mert a rács  $3 \times 4$ -es téglalapokból áll. A *b*) ábrán látható  $10 \times 15$ -ös téglalap és a benne látható vastag (nem szaggatott vonallal húzott) szakaszok valamilyen téglalaprács maradványai, a többi vonalat valaki kiradírozta. Milyen lehetett az a téglalaprács, amit kiradíroztak? Legalább hány vonallal kell kiegészíteni a *b*) ábrát ahhoz, hogy olyan téglalaprácsot kapjunk, amelyben a folytonos vonalal meghúzott szakaszok a rácsvonalakra illeszkedjenek?



*a*)



*b*)

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

**6. Feladat.** A Vuki nevű úrnép a Kashyyk bolygóról költözik az Endor bolygóra egyszemélyes űrhajókban. Az út megtételéhez egy űrhajónak 1 egységnyi hajtóanyagra van szüksége. Ugyanakkor, ha csoportokban utaznak, akkor a fogyasztásuk csökken a következő szabályok szerint: 4-es csoportban a csoport fogyasztása

3, 10-es csoportokban 9, 100-as csoportokban 70 és 1000-es csoportokban 600 egység.

1. Határozd meg, hogy legalább mennyi üzemanyag szükséges az átköltözéshez, ha a létszám 35. Hát akkor, ha a létszám 258 vagy 3212?
2. Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén határozd meg az  $n$  úrlény átköltöztetéséhez szükséges üzemanyag mennyiségét!

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

## VII. osztály

**1. Feladat.** Fel lehet-e írni az  $1, 2, 3, \dots, 9$  számokat egy kör kerületére úgy, hogy bármelyik két szomszédos szám összegét számolva olyan számot kapjunk, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

Nagy Olga, Nagyszalonta

**2. Feladat.** Egy 30-as létszámú osztályban a fiúk  $\frac{2}{3}$ -a és a lányok  $\frac{1}{2}$ -e együtt 90 perc alatt hámoz meg egy zsák almát. Ha a fiúk  $\frac{1}{2}$ -e és a lányok  $\frac{2}{3}$ -a venne részt a munkában, akkor 85 perc alatt végeznének. Feltételezzük, hogy mindenki ugyanolyan sebességgel dolgozik.

- a) Hány fiú és hány lány van az osztályban?
- b) Mennyi idő alatt hámozná meg a zsák almát, ha az egész osztály dolgozna?

Simon József, Csíkszereda

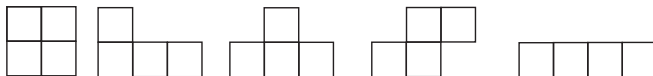
**3. Feladat.** Az  $ABCD$  négyzetben jelöljük  $E$ -vel az  $AD$  oldal felezőpontját és  $F$ -fel az  $AB$  oldal  $A$ -hoz közelebb eső negyedelő pontját. Bizonyítsd be, hogy az  $E$  pontnak a  $CF$ -től mért távolsága egyenlő a négyzet oldalhosszának a felével!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

**4. Feladat.** Az  $ABCD$  téglalap  $AB$  oldalán felvesszük az  $M_1, M_2, M_3$  pontokat ( $A$ -tól  $B$  irányába ebben a sorrendben), a  $DC$  oldalán pedig az  $N_1, N_2, N_3$  és  $N_4$  pontokat ( $D$ -től  $C$  irányába ebben a sorrendben). Hasonlóan felvesszük a  $P_1 \in (AD)$  és  $Q_1, Q_2 \in (BC)$  pontokat ( $BC$ -n a sorrend  $B - Q_1 - Q_2 - C$ ). Tekintjük az  $AN_1M_1$ ,  $M_1N_2M_2$ ,  $M_2N_3M_3$ ,  $M_3N_4B$ , illetve a  $DQ_2P_1$  és  $P_1Q_1A$  háromszögeket. Az első négyet elsőfajúnak, az utolsó kettőt másodfajúnak (vagy vízszintesnek, illetve függőlegesnek) nevezzük. Jelölje  $T_1$  azon síkdarabkák területének összegét, amelyek egyaránt hozzátartoznak valamilyen első és másodfajú háromszöghöz, illetve  $T_2$ -vel azon síkdarabkák területének összegét, amelyek a téglalap belsejében vannak, de nem tartoznak sem elsőfajú, sem másodfajú háromszöghöz. Bizonyítsd be, hogy  $T_1 = T_2$ !

Simon József (feladata alapján), Csíkszereda

**5. Feladat.** A mellékelt ábrán látható darabokból össze lehet-e rakni egy téglalapot úgy, hogy mindenik darabot felhasználjuk és ne keletkezzen sem átfedés, sem üres rész a téglalapon?



SimpleX Egyesület, Csíkszereda

**6. Feladat.** Három biciklis egy túrán vesz részt, amely abból áll, hogy az  $A$  helységig vonattal utaznak, onnan a  $B$  helységig bicikliznek, majd  $B$ -ből vonattal térnek haza. Az  $A$  és  $B$  közti szakaszon egy  $C$  pontban az egyikük biciklje használhatatlanná (és javíthatatlanná) vált (becsúszott egy szakadékba). Gyalogosan a sebességük  $4 \text{ km/h}$  és biciklivel  $16 \text{ km/h}$ . A  $C$  és  $B$  távolsága (a vasútállomásig)  $24 \text{ km}$ , az  $A$  és  $C$  távolsága  $60 \text{ km}$  és  $B$ -ből  $3$  és fél óra múlva lenne vonatjuk hazafele. Elérhetik-e mindhárman ezt a vonatot, ha a megmaradt biciklik egyikére sem ülhetnek egyszerre ketten?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

## VIII. osztály

**1. Feladat.** Hány olyan sík van, amely egy adott kocka csúcsai közül legalább háromra illeszkedik?

Róka Sándor, Nyíregyháza

**2. Feladat.** Az  $ABCD$  négyzet ( $CD$ ) oldalán vegyük fel az  $E$  pontot úgy, hogy az  $A$  középpontú  $AB$  sugarú kör felezze a  $(BE)$  szakaszt. Számítsd ki az  $\widehat{EBC}$  szög mértékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

**3. Feladat.** A KEDVED szóban minden betű helyett valamilyen tízes számrendszerbeli számjegyet írtunk (azonos betűk helyére azonos számjegyeket). Milyen számjegyet helyettesítettünk az  $E$  betű helyére, ha a kapott szám négyzetszám, a  $V$  helyére 4-gyel nagyobb számot helyettesítettünk, mint a  $K$  helyére és a  $D$  helyére a 4-et helyettesítettük?

Bencze Mihály, Brassó

**4. Feladat.** A  $VABC$  szabályos háromoldalú gúlában  $O$  az  $ABC$  alap középpontja,  $A' \in (VA)$ ,  $B' \in (VB)$  és  $C' \in (VC)$ . Jelöljük  $E, F$  és  $G$ -vel rendre az  $AB, BC$ , illetve  $CA$  oldal felezőpontját és tekintjük az  $\{E'\} = VE \cap A'B'$ ,  $\{F'\} = VF \cap B'C'$ , valamint  $\{G'\} = VG \cap C'A'$  metszeteket. Számítsuk ki az  $E'F'G'$  és az  $A'B'C'$  háromszögek területének arányát a  $VA' = a$ ,  $VB' = b$  és  $VC' = c$  hosszúságok függvényében!

Simon József, Csíkszereda

**5. Feladat.** Egy régi típusú kenyérpíró egyszerre egy vagy két szelet kenyeret tud pírítani, de minden betett szeletnek csak az egyik oldalát. Egy oldal pírításához szükséges idő 50 másodperc, a szeleteket nem szabad túlsütni, egy szelet kivetéséhez vagy betetéséhez külön-külön 1,5 másodperc és a megfordításához 2 másodperc szükséges. Minden művelet (betetés, kivetés, megfordítás) végrehajtásához mindkét kezünkre szükség van, tehát nem lehet két műveletet egyszerre végrehajtani. Legkevesebb mennyi idő alatt lehet megpírítani ezen a pírítón 3 szelet kenyér mindkét oldalát?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

**6. Feladat.** Három egybevágó, szabályos hatszög alakú papírlapot vágj szét darabokra úgy, hogy a keletkezett darabokból egy nagyobb szabályos hatszöget lehessen összerakni!

Nagy Örs, Marosvásárhely

## Megoldások V. osztály

**1. Feladat.** Egy 63 elemű halmaz minden eleme természetes szám és elemeinek összege 2013. Mennyi az elemek szorzata?

Szilágyi Emőke, Marosvásárhely

*Első megoldás.* Ha a 0 nem eleme a halmaznak, akkor az elemek összege legalább

$$1 + 2 + 3 + \dots + 63,$$

mivel a halmaz 63 természetes számot tartalmaz és a 0-n kívül az előbb felsorolt számok a legkisebbek. Másrészt az  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 63$  összeg esetén

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 60 + 61 + 62 + 63$$

$$S = 63 + 62 + 61 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1,$$

tehát  $2S = 63 \cdot 64$  (az egymás alá írt számok összege 64 és 63 darab ilyen egymás alá írt pár van). Így  $S = 2016$ , tehát ha 0 nincs a számok közt, akkor a halmaz elemeinek összege nem lehet 2016-nál kisebb. A megadott halmaz tehát tartalmazza a 0-t és így az elemek szorzata 0. A teljes megoldáshoz az is hozzátartozik, hogy egy ilyen halmazra példát adunk. A 2016-hoz képest hárommal kell csökkenteni az összeget, ahhoz, hogy a 63 szám összege 2013 legyen. Ez lehetséges, ha a 3-ast kicseréljük 0-ra, tehát az

$$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, \dots, 63\}$$

halmaz teljesíti a feladat feltételeit. ⊗

*Második megoldás.* Ha a halmaz elemeit növekvő sorrendbe rendezzük ( $x_1 < x_2 < \dots < x_{63}$ ), akkor a másodikból kivonhatunk 1-et, a harmadikból 2-t, a negyedikből 3-at és így tovább az

utolsóból 62-t. A kapott eredmények természetes számok, szintén növekvő sorrendben vannak (csak lehetnek köztük egyformák is) és az összegük  $2013 - 1953 = 60$ . Másrészt 63 darab, páronként nem föltétlenül különböző természetes szám összege csak akkor lehet 60, ha a legkisebb három szám 0. Így az eredeti halmaz három legkisebb eleme a 0, az 1 és a 2. Tehát a halmaz elemeinek szorzata 0. Az előbbieket alapján több olyan halmazt is szerkeszthetünk, amely teljesíti a feltételeket.  $\otimes$

**1. Megjegyzés.** Érdemes azon elgondolkodni, hogy hány olyan halmaz létezik, amely teljesíti a feladat feltételeit, hogyan szerkeszthetők meg az ilyen halmazok. Ebben az esetben a lehetséges esetek száma viszonylag nagy (865), de a második megoldás ötletét használva egy kis kitartással kiszámolható.

**2. Feladat.** Öt egymást követő természetes szám esetén a páros és páratlan számok összege közötti különbség 86. Melyik ez az öt szám?

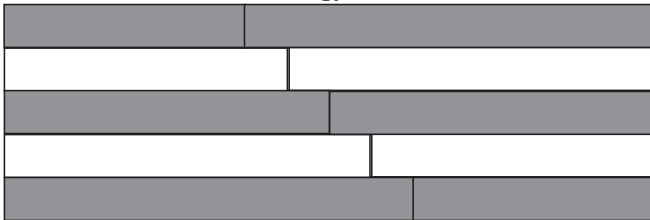
Nagy Jenő, Székelyudvarhely

*Első megoldás.* Két egymás utáni szám különbsége 1, tehát az utolsó négy számot nézve a párosok és páratlanok összegének különbsége 2. Az adott különbség ehhez viszonyítva pontosan az első számmal nagyobb, tehát az első szám 84 és így a keresett számok 84, 85, 86, 87, 88.  $\otimes$

*Második megoldás.* Az első és az utolsó szám összege a középső kétszerese. Ugyanakkor a második és a negyedik összege szintén a középső kétszerese, tehát a párosok összege és a páratlanok összege közti különbség éppen a középső szám. Tehát a keresett számok 84, 85, 86, 87, 88.  $\otimes$

*Harmadik megoldás.* Ha az öt szám közül az első szám páratlan, akkor három páratlan és két páros számról van szó, tehát a páratlanok összege páratlan (mert három páratlan számot adunk össze) és a párosok összege páros. Ebben az esetben a különbség nem lehet páros, tehát az öt szám közül az első páros. Így a párosok összege az első szám háromszorosánál  $2+4 = 6$ -tal több. A páratlanok összege az első szám kétszeresénél  $1 + 3 = 4$ -gyel nagyobb, tehát a két összeg közti különbség az első számnál 2-vel nagyobb. Ez alapján a keresett számok 84, 85, 86, 87, 88.  $\otimes$

**2. Megjegyzés.** Az előbbi megoldások mindegyike grafikusan is ábrázolható. A mellékelt ábra egy további érvelést mutat.



A különbség kétszerese a három satírozott sáv és a két fehér sáv különbsége. Ez épp egy sáv, tehát egyenlő a középső szám kétszeresével. Így a középső szám 86, vagyis a keresett számok 84, 85, 86, 87, 88.

**3. Feladat.** Jancsi egy doboz golyót egy szekrény fiókjaiba tesz úgy, hogy az első fiókba egy golyót tesz és minden további fiókba pontosan kétszer annyit, mint az előző fiókba (tehát a második fiókba két golyót, a harmadik fiókba négy golyót, a negyedik fiókba nyolc golyót és így tovább).

- Hány golyót tesz Jancsi a szekrénybe összesen, ha a szekrénynek 7 fiókja van?
- Jancsi édesapja találmásra kihúzott néhány fiókot és ezekben összesen 107 golyót talált. Melyik fiókokat húzta ki?



Pap Czier Levente, Nagykároly

*Első megoldás.* a) Jancsi a fiókokba rendre 1, 2, 4, 8, 16, 32, illetve 64 golyót tesz, tehát összesen

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

golyót tesz a szekrénybe.

b) Összesen 127 golyó van a szekrényben, tehát csak 20 golyót nem talált meg Jancsi édesapja. Megvizsgáljuk, hogy ez, hogyan lehetséges, tehát a 20-at, hogyan lehet összegként előállítani az 1, 2, 4, 8, 16 számok segítségével (a többi túl nagy). Az 1-es nem szerepelhet az összegben, mert páratlan és az összes többi, valamint a 20 is páros. A 2, 4 és 8 összege csak 14, tehát a 16 biztosan szerepel az előállításban. Így csak a  $20 = 16 + 4$  előállítás lehetséges, tehát Jancsi édesapja csak a harmadik és az ötödik fiókot nem nyitotta ki. Ez azt jelenti, hogy kinyitotta az első, a második, a negyedik, a hatodik és a hetedik fiókot.  $\otimes$

*Második megoldás.* a) Ha még egy golyót betennénk az első fiókba, akkor az első fiókban pontosan annyi lenne, mint a másodikban, tehát az első két fiókban pontosan annyi, mint a harmadikban. Így az első három fiókban pontosan annyi golyó lenne, mint a negyedikben, az első négyben pontosan annyi, mint az ötödikben, az első ötben pontosan annyi, mint a hatodikban, az első hatban pontosan annyi, mint a hetedikben. Összesen tehát 1-gyel kevesebb golyó van a fiókokban, mint az utolsó fiók kétszeresében. Az egyes fiókokban kerülő golyók száma kettőhatvány. A hetedik fiókban  $2^6 = 64$  golyó van, tehát összesen  $2 \cdot 64 - 1 = 127$  golyó van a fiókokban.

b) A 107-et elő kell állítanunk kettőhatványok összegeként.  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 < 107$ , tehát a Jancsi apukája a 64

golyót tartalmazó fiókot (a hetediket) biztosan kinyitotta. A többi kinyitott fiók még összesen 43 golyót tartalmazott.  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 < 43$ , tehát a 32 golyót tartalmazó fiókot (a hatodikat) is ki kellett nyitnia. A hatodik és a hetedik fiókon kívül a kinyitott fiókok összesen 11 golyót tartalmaznak, tehát az ötödik fiókot nem nyithatta ki.  $1 + 2 + 4 = 7 < 11$ , tehát a negyedik fiókot (amelyben 8 golyó van) is ki kellett nyitnia. Végül a megmaradt három golyó csak az első két fiók kinyitásával jelenhet meg, tehát Jancsi édesapja az első, a második, a negyedik, a hatodik és a hetedik fiókot nyitotta ki.  $\otimes$

*Harmadik megoldás.* a) A kettes számrendszerbeli felírást használjuk. Az egyes fiókba kerülő golyók száma

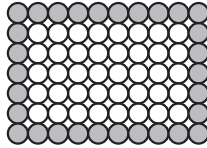
$$1, 10_{(2)}, 100_{(2)}, 1000_{(2)}, 10000_{(2)}, 100000_{(2)}, 1000000_{(2)},$$

tehát Jancsi összesen  $1111111_{(2)} = 10000000_{(2)} - 1 = 127$  golyót tett a fiókba.

b) A 107-et kettőhatványok összegeként kell előállítani. Ez valójában azt jelenti, hogy a 107-et átalakítjuk 2-es számrendszerbe.  $107 = 2 \cdot 53 + 1$ ,  $53 = 2 \cdot 26 + 1$ ,  $26 = 2 \cdot 13 + 0$ ,  $13 = 2 \cdot 6 + 1$ ,  $6 = 2 \cdot 3 + 0$ , és  $3 = 2 \cdot 1 + 1$ . A maradékokat hátulról összeolvasva a  $107 = 1101011_{(2)}$ , tehát Jancsi édesapja az első, a második, a negyedik, a hatodik és a hetedik fiókot nyitotta ki.  $\otimes$

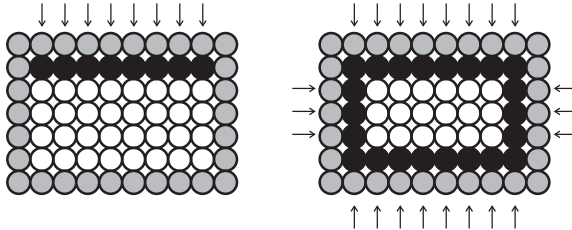
**3. Megjegyzés.** A  $107 = 64 + 32 + 8 + 2 + 1$  felírás megtalálása nem elégséges, csak ha az egyértelműség is indokolva van (akár a felírás megtalálásának gondolatmenetével, akár számrendszerekkel). Érdeemes megjegyezni, hogy a kettes számrendszerbeli felírás létezése és egyértelműsége alapján tetszőleges  $1 \leq j \leq 127$  szám esetén egyértelműen meg lehet mondani, hogy Jancsi édesapja melyik fiókokat kellene kinyissa ahhoz, hogy azokban összesen pontosan  $j$  golyó legyen.

**4. Feladat.** Valahány egyforma korongot az ábra szerint téglalap alakba rendeztünk el. A szegélyező korongokat szürkére festettük, a többi fehérre. Hány korongból állhat egy ilyen téglalap, ha ugyanannyi szürke korong van benne, mint amennyi fehér?



Róka Sándor, Nyíregyháza

*Első megoldás.* A téglalap szélessége mentén nem lehet 3 vagy annál kevesebb korong, mert akkor a belsejében vagy nem lenne egyáltalán korong, vagy csak egy sor korong lenne és a szélén több, mint két ugyanolyan sor. Ha a szélesség mentén több, mint 3 korongot helyeztünk el, akkor vizsgálhatjuk azokat a korongokat, amelyek a külső szegélyt alkotnák, ha elvinnénk a szürke korongokat. A mellékelt ábra alapján ebben a belső keretben pontosan 8 koronggal van kevesebb, mint ahány szürke korong van.



Ez azt jelenti, hogy a feladat feltételei csakis akkor teljesülhetnek, ha a fekete (belső keretet alkotó) korongok belsejében pontosan 8 korong található. Mivel a 8 korong csak  $1 \cdot 8$  és  $2 \cdot 4$  alakú elrendezésből kapható meg az eredeti téglalap  $5 \cdot 12 = 60$  vagy  $6 \cdot 8 = 48$  korongot tartalmazhat.  $\otimes$

*Második megoldás.* Jelöljük a keresett téglalap alakú elrendezés két oldala mentén elhelyezett korongok számát  $a$ -val illetve  $b$ -vel.

Így a szürke korongok száma  $2a + 2(b - 2)$  és a belső (fehér) korongok száma  $(a - 2)(b - 2)$ . Tehát meg kell határozni azokat az  $a, b \in \mathbb{N}^*$  számokat, amelyekre

$$2a + 2(b - 2) = (a - 2)(b - 2).$$

Ez rendre a következőképpen alakítható:

$$(a - 2)(b - 2) - 2(b - 2) - 2a = 0$$

$$(a - 4)(b - 2) - 2a = 0$$

$$(a - 4)(b - 2) - 2a + 8 = 8$$

$$(a - 4)(b - 2) - 2(a - 4) = 8$$

$$(a - 4)(b - 4) = 8.$$

Másrészt  $a \geq 4$  és  $b \geq 4$ , tehát a baloldalon megjelenő tényezők természetes számok. A 8-at csak  $1 \cdot 8$ , illetve  $2 \cdot 4$  alakban lehet két tényező természetes szám szorzataként előállítani, tehát az eredeti téglalap  $5 \cdot 12 = 60$  vagy  $6 \cdot 8 = 48$  korongot tartalmazhat.  $\otimes$

**4. Megjegyzés.** Az  $ab - 4a - 4b + 8 = 0$  egyenlethez más gondolatmenettel is eljuthatunk és ezt más módszerrel is megoldhatjuk. Például ha kifejezzük a  $a$ -t, akkor az

$$a = \frac{4b - 8}{b - 4}$$

kifejezést kapjuk. A számlálóban a  $4b$  miatt a  $b - 4$  kifejezés négyeszeresét jelenítjük meg:

$$a = \frac{4b - 8}{b - 4} = \frac{4(b - 4) + 8}{b - 4} = 4 + \frac{8}{b - 4}.$$

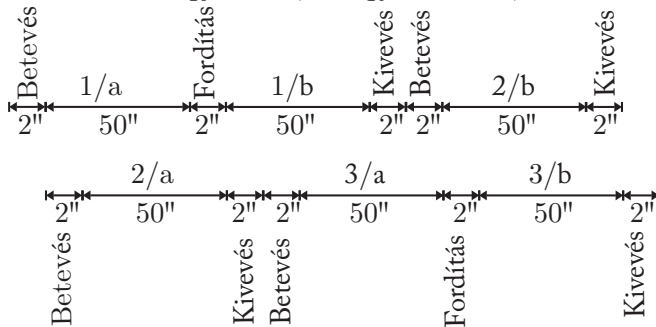
Ez alapján  $b - 4 \in \{1, 2, 4, 8\}$ , tehát 4 esetet kell letárgyalni. A szimmetria miatt ugyanazokhoz a megoldásokhoz jutunk, mint az előbbi két megoldásban.

**5. Feladat.** Egy régi típusú kenyérpirító egyszerre egy vagy két szelet kenyeret tud pirítani, de minden betett szeletnek csak az egyik oldalát. Egy oldal pirításához szükséges idő 50 másodperc, a szeleteket nem szabad túlsütni, egy szelet kivevéséhez, betevéséhez, megfordításához külön-külön 2 – 2 másodperc szükséges és egyszerre egy művelet hajtható végre (mindkét kézre szükség van egy szelet betevésénél, megfordításánál vagy kivevésénél). Legkevesebb mennyi idő alatt lehet megpirítani ezen a pirítón 3 szelet kenyér mindkét oldalát?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

*Első megoldás.* A három szelet kenyérnek összesen 6 oldala van. Ha a 6 oldalból a pirító egyik oldalán legalább 4-et pirítunk, akkor az több, mint  $200''$  (200 másodperc), tehát azt kell elérnünk, hogy a pirító mindkét oldalán a kenyerek oldalaiból 3 – 3 kerüljön meg (ennél kevesebb nem lehet). Ehhez az egyik szelet kenyér egyik oldalának megpirítása után a szelet kenyeret ki kell venni és be kell tenni egy másik szeletet. Ha a pirító egyik oldalát nézzük, akkor itt a 3 szelet megpirításához  $150''$  szükséges. Ezen kívül a három oldal megsütése után legalább 2-szer ki kell venni a szeletet (azt, amelyiknek nem itt sül mindkét oldala és a másik szeletet, amelynek itt sül mindkét oldala) és legalább 3-szor betevés vagy csere történik (hisz mindhárom oldalnak valahogyan be kell kerülnie a sütőbe és ez csak a betevéssel, illetve az oldalcserével történhet meg). Ez azt mutatja, hogy a pirító egyik oldalának a használata legalább  $150 + 5 \cdot 2 = 160$  másodpercbe telik. Másrészt mindkét oldalon nem kezdhetünk egyszerre, mert akkor a két betevést egyidőben kellene végrehajtani. Emiatt a pirító két oldalának a kihasználása közt legalább egy  $2''$ -es eltolódásnak kell lenni és így a teljes idő nem lehet kisebb, mint  $162''$ . A mellékelt ábra mutatja, hogy  $162''$  alatt hogyan lehet kivitelezni a három

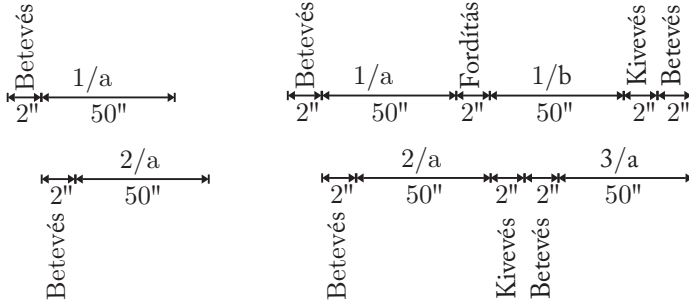
szelet megsütését (a szeleteket megszámoztuk 1-től 3-ig és minden szelet két oldalát megjelöltük, az egyiket  $a$ -val, a másikat  $b$ -vel).



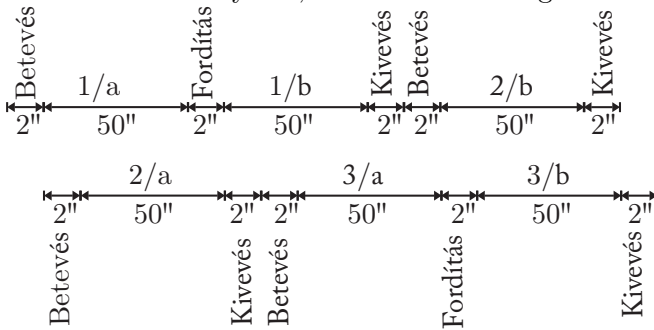
⊗

*Második megoldás.* Arra törekszünk, hogy a sütő mindkét oldalát (rekeszét) optimálisan használjuk ki, vagyis minimálisra csökkentjük azt az időt, amikor a sütő egyik oldala nem végez hasznos munkát. Amikor az első szeletet berakjuk és az utolsót kivesszük, a sütőnek csak az egyik oldalát használjuk. Ha sikerül a továbbiakban egy olyan kivitelezési tervet létrehozni, amelyben minden további időpillanatban mindkét oldalt használjuk (kivevésre, betevésre, cserére vagy sütésre), akkor az jó, mert minden művelet hossza rögzített. Az egyik oldalon berakunk egy szeletet és kezdjük sütni ( $1/a$ ). A sütés közben berakjuk a sütő másik oldalára egy másik szelet egyik oldalát ( $2/a$ ) sülni. A második szelet sütését később is kezdhethetnénk, de ezt a késést nem lehet behozni később. Amikor az  $1/a$  oldal megsült, akkor még  $2$  másodperc van a  $2/a$  elkészüléséig, tehát ha az első szeletet kivennénk, hogy egy más szeletet rakjunk be, akkor a második szeletet vagy túlsütnénk, vagy ennek elkerülése érdekében  $2$  másodperccel később kellett volna elkezdjük a sütését és ez okozna még  $2''$  eltolódást, ami az összidőben is megjelenne (hisz ez alatt a sütő egyik oldala nem volt kihasználva). Emiatt az első szeletet meg

kell fordítanunk.



Ha a másodikat is megfordítjuk, akkor mivel a harmadik szelet két oldalát nem lehet egyszerre sütni, a sütő egyik oldala  $50''$ -ig nem használnódna ki, ezért a második szeletet ki kell venni és a helyére betenni a harmadik szelet egyik oldalát ( $3/a$ ). Ugyanakkor az első szelet második oldalának megsülése után ezt a szeletet ki kell venni és helyette vissza kell tenni a második szelet még meg nem sült oldalát ( $2/b$ ). Látható tehát, hogy az elvégzendő műveletek csak egyféleképpen párhuzamosíthatóak úgy, hogy a sütő egyik oldala se legyen kihasználatlanul. A mellékelt ábra tehát az egyetlen lehetőség, amelyben a sütő mindkét oldala a legtöbb ideig van egyidőben használatban. Ez a legrövidebb kivitelezést kell eredményezze, tehát  $162''$  szükséges.



**5. Megjegyzés.** Érdeemes azon is elgondolkodni, hogy több szelet kenyér (pl. 4, 5, 11 stb.) esetén, hogyan járnánk el.

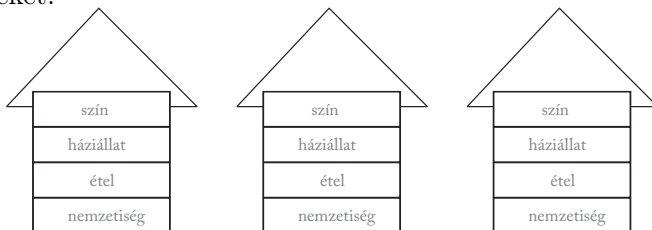
**6. Feladat.** Egy kis skandináv faluban három egymás melletti házban három különböző nemzetiségű ember lakik. Minden háztulajdonos más-más állatot tart, illetve más-más a kedvenc étele, és igazak az alábbi állítások:

- A dán kedvenc étele a lazacsült.
- A középső házban kutyát tartanak.
- A zöld ház nem szomszédja a kék háznak.
- Aki tonhalat eszik, az első házban lakik.
- A zöld házzal szomszédos házban a finn lakik.
- Aki hörcsögöt tart, a kék házban lakik.
- A kék házban lakó embernek nem kedvenc étele a tonhal.
- A norvég szomszédjának kedvenc étele a rénszarvaspörkölt.

Ki tart macskát? Ki lakik a piros házban?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

*Első megoldás.* Elkészítjük a házakat, majd az állítások alapján kezdjük helyrerakni az állatokat, a nemzetiségeket, az ételeket és a színeket.

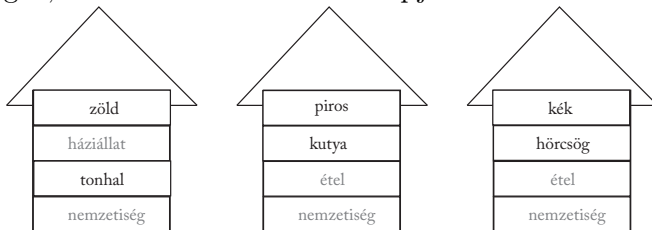




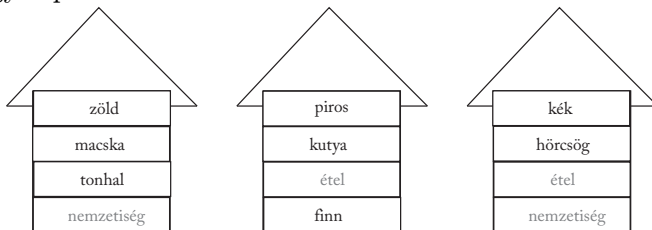
A kutya középre kerül, a tonhal az első házba.



Mivel a zöld és a kék ház nem szomszédos, a középső ház piros. Másrészt a zöld és a kék ház a két szélső. De a kék házban nem esznek tonhalat (és a tonhal az első házban van), tehát az első ház a zöld és az utolsó a kék. Ugyanakkor a kék házban lakik a hörcsög is, tehát a következő ábrát kapjuk:

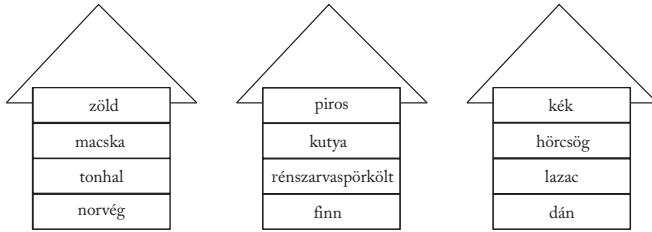


A zöld házzal szomszédos házban a finn lakik, tehát a finn a középső házban lakik. Ugyanakkor a második és a harmadik házban már megtaláltuk a kedvenc háziállatot, tehát a macska az első házban van. Ezzel válaszolni tudunk a második kérdésre, hisz így a piros házban a finn lakik.



Mivel a dán kedvenc étele a lazacsült, ő csak az utolsó házban lakhat (az elsőben tonhalat esznek, a másodikban a finn lakik).

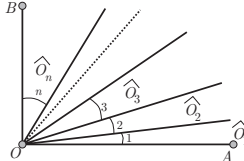
Így a rénszarvápörkölt csak a második házhoz kerülhet és az első házban a norvég lakik. Tehát a norvég tart macskát.



**6. Megjegyzés.** A megoldás során az információk felhasználásának sorrendjétől függően nagyon sok különböző gondolatmenet kialakulhat. Az is lehetséges, hogy eseteket tárgyaljunk. Az előbbi gondolatmenet egy példa arra, amikor nem szükséges esetek tárgyalása, tehát a gondolatmenetben minden lépés egyértelmű, ezért megtalált elrendezés az egyetlen lehetséges.

## VI. osztály

**1. Feladat.** A mellékelt ábrán  $AO \perp OB$  és az  $\widehat{AOB}$  szöveget néhány,  $O$ -ból induló félegyenessel úgy osztottuk fel, hogy a keletkező  $\widehat{O}_1, \widehat{O}_2, \widehat{O}_3, \dots, \widehat{O}_n$  szögek mértékszámai (fokban kifejezve) egymás utáni páros számok legyenek. Legtöbb hány félegyenest húzhattunk be?



Gagyai Dénes, Székelykeresztúr

*Első megoldás.* A legtöbb félegyenest akkor kapjuk, ha a szögek a lehető legkisebbek. A  $2^\circ$ -os szögtől kezdődően megpróbáljuk

összeadni a páros mérőszámmal rendelkező szögek mértékét addig, amíg elérjük, vagy esetleg túllépjük a  $90^\circ$ -ot.

$$2^\circ + 4^\circ + 6^\circ + \dots + 18^\circ = 2(1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 9^\circ) = 90^\circ,$$

tehát 8 félegyenessel 9 részre osztható a derékszög a feladat feltételeinek megfelelően és ennél több részre nem lehet felosztani a feltételeknek megfelelően. Ennek az érvnek egy formálisabb leírását is részletezzük. Ha több, mint 9 részre osztgatnánk az eredeti szöget, akkor  $m(\widehat{O}_1) \geq 2^\circ$ ,  $m(\widehat{O}_2) \geq 4^\circ$ ,  $m(\widehat{O}_3) \geq 6^\circ$ , és így tovább  $m(\widehat{O}_9) \geq 18^\circ$ , illetve  $m(\widehat{O}_{10}) \geq 20^\circ$ , tehát

$$m(\widehat{O}_1) + m(\widehat{O}_2) + \dots + m(\widehat{O}_{10}) + \dots + m(\widehat{O}_n) \geq 110^\circ > 90^\circ,$$

ami ellentmondás. Így legtöbb 8 félegyenest húzhatunk be.  $\otimes$

*Második megoldás.* Ha  $m(\widehat{O}_1) = 2k^\circ$ , akkor  $m(\widehat{O}_2) = (2k + 2)^\circ$  és így tovább  $m(\widehat{O}_n) = (2k + 2(n - 1))^\circ$ . Ez alapján a

$$2k + (2k + 2) + (2k + 4) + \dots + (2k + 2(n - 1)) = 90$$

egyenlethez jutunk. Ez

$$2nk + n(n - 1) = 90$$

alakban is írható, tehát  $n(2k + n - 1) = 90$ . Mivel  $n < 2k + n - 1$ , a 90-et úgy kell felírni két természetes szám szorzataként, hogy a kisebbik szám a lehető legnagyobb legyen. Ez a felírás a  $9 \cdot 10 = 90$ , ahonnan  $n = 9$  és  $k = 1$ , vagyis a szöget 9 részre osztjuk és a legkisebb szög mértéke  $2^\circ$ . Ezt 8 félegyenessel érhetjük el.  $\otimes$

**2. Feladat.** A 2013 egy olyan természetes szám, amelyben az első és a harmadik számjegy összege egyenlő a második és a negyedik számjegy összegével. Hány ilyen évszám van a 3. évezredben?

Durugy Erika, Torda

*Megoldás.* A harmadik évezredben az első év a 2001, az utolsó a 3000. A 3000 nem rendelkezik a kért tulajdonsággal, így az összes keresett szám 2-essel kezdődő négyjegyű évszám. A harmadik helyen bármilyen számjegy állhat, így az első és harmadik számjegy összege 2-től 11-ig bármi lehet (2-t és 11-et is beleértve). Ha ez az összeg  $k$ , és  $k \leq 9$ , akkor a második és a negyedik számjegy megválasztása a következőképpen lehetséges:

$$0 + k, 1 + (k - 1), \dots, k + 0.$$

Ha  $k = 10$ , akkor a lehetséges előállítások

$$1 + 9, 2 + 8, \dots, 9 + 1,$$

míg ha  $k = 11$ , akkor

$$2 + 9, 3 + 8, \dots, 9 + 2.$$

Tehát összesen  $3 + 4 + \dots + 10 + 9 + 8 = 69$  ilyen szám van.  $\otimes$

**7. Megjegyzés.** Az esetek csoportosítása tetszőleges szempont szerint megtörténhet. Például ha a szám  $\overline{2abc}$ , akkor a  $2 + b = a + c$  egyenlőségben a tárgyalást elvégezhetjük az  $a$  lehetséges értékei alapján is. Ha  $a = 0$ , akkor  $c = b + 2$ , tehát 8 eset lehetséges, ha  $a = 1$ , akkor  $c = b + 1$ , tehát 9 esetünk van, ha  $a = 2$ , akkor 10 eset. Ha az  $a$  értéke rendre 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, akkor a megjelenő esetek száma rendre 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 és így az összes lehetséges eset száma 69.

**3. Feladat.** Keresz két olyan egymás utáni természetes számot, hogy mindkét szám számjegyeinek összege osztható legyen 5-tel! Melyek a legkisebb ilyen tulajdonsággal rendelkező számok? Hány ilyen számpár létezik 0 és 100000 között?

Róka Sándor, Nyíregyháza

*Első megoldás.* Ha a kisebbik szám utolsó számjegye nem 9, akkor 1-et hozzáadva a számjegyek összege 1-gyel nő. Így nem lehet mindkét szám számjegyeinek összege 5 többszöröse. Ha a kisebbik szám utolsó számjegye 9 és utolsó előtti számjegye nem 9, akkor 1-et hozzáadva a számjegyek összege 8-cal csökken (9-esből 0 lesz, és az utolsó előtti  $a$ -ból  $a+1$  lesz). Így ebben az esetben sem lehet mindkét összeg 5-nek többszöröse. Ha a kisebbik szám utolsó és utolsó előtti számjegye 9-es és az az előtti számjegye nem 9-es, akkor számjegyeinek összege 17-tel csökken, ami szintén nem megfelelő. Ha az utolsó három számjegy 9-es és hátulról a negyedik számjegy nem 9-es, akkor 26-tal csökken a számjegyek összege, tehát ez sem megfelelő. Ha az utolsó négy számjegy 9-es, és hátulról az ötödik nem az, akkor 35-tel csökken a számjegyek összege. Ebben az esetben ha a kisebbik szám számjegyeinek összege osztható 5-tel, akkor a nagyobbik szám számjegyeinek összege is osztható 5-tel. Ha az utolsó négy számjegy 9-es, akkor ahhoz, hogy az összeg 5-tel osztható legyen az első számjegy legkisebb lehetséges értéke 4. Így a legkisebb ilyen szám a 49999, tehát a kért tulajdonsággal rendelkező legkisebb számok a 49999 és az 50000.

Ha további olyan számpárokat keresünk, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal és nem nagyobbak, mint 100000, akkor azok közül a kisebb legfeljebb 5 jegyű lehet. Ugyanakkor az előbbi gondolatmenet alapján az utolsó négy számjegye 9-es, tehát csak az első számjegyét kell meghatároznunk úgy, hogy a számjegyek összege 5-tel osztható legyen. Erre csak az a lehetőség van, hogy az első számjegy is 9-es (mert a

36-hoz csak a 4-es vagy a 9-es számjegyet lehet úgy hozzáadni, hogy az összeg osztható legyen 5-tel). Ez viszont nem jó, mert ebben az esetben a következő szám a 100000 és ebben a számjegyek összege nem osztható 5-tel. Tehát 0 és 100000 között csak egy olyan számpár van, amely rendelkezik az adott tulajdonsággal.  $\otimes$

*Második megoldás.* Keressük a 100000-nál kisebb  $x$  számokat, amelyekre  $x$  és  $x + 1$  rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a számjegyeinek összege osztható 5-tel. Jelöljük  $5k$ -val az  $x$  számjegyeinek összegét és  $5v$ -vel az  $x + 1$  számjegyeinek összegét. Mivel minden természetes szám 9-cel való osztási maradéka megegyezik a számjegyeinek összegének 9-cel való osztási maradékával, ezért  $5k + 1 - 5v$  osztható 9-cel. Így  $5(k - v) + 1$  osztható 9-cel. Mivel  $x$  és  $x + 1$  számjegyeinek összege nem haladhatja meg az  $5 \cdot 9 = 45$ -öt (mert legfeljebb ötjegyűek lehetnek) ez csak úgy lehetséges (a 9-es szorzótábla alapján), ha  $5(k - v) + 1 = 36$ , vagyis  $5k = 5v + 35$ . Mivel  $v \neq 0$  az  $x$  számjegyeinek összege 40 vagy 45 lehet és ennek megfelelően  $x + 1$  számjegyeinek összege 5, illetve 10. Mindkét összeg csak úgy jelenhet meg, ha a szám tartalmaz legalább négy darab 9-es számjegyet és az ötödik számjegy 4 vagy 9. Az öt 9-es jegyből álló  $x$  szám esetén az  $x + 1$  jegyeinek összege nem 10. A négy 9-esből és egy négyesből felírható  $x$  számok közül csak az  $x = 49999$ -re lesz az  $x + 1$  számjegyeinek összege 5, tehát az egyetlen számpár, amely teljesíti a megadott tulajdonságot a 49999 és 50000.  $\otimes$

**4. Feladat.** A 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számjegyek segítségével felírunk néhány olyan hétjegyű számot, amelyben minden felsorolt számjegy pontosan egyszer szerepel. Kiválaszthatunk-e ezek közül két olyan különböző számot, amelyek közül az egyik osztója a másiknak?

Bencze Mihály, Brassó

*Első megoldás.* Bármelyik ilyen két szám számjegyeinek összege 37, tehát mindkettő 9-cel való osztási maradéka 1 és különbségük osztható 9-cel. Ugyanakkor, ha a nagyobbik szám többszöröse a kisebbiknek, akkor a különbség is többszöröse a kisebbiknek. Mivel a különbség osztható kilencel, és a kisebbik szám relatív prím 9-cel, a különbség legalább 9-szerese a kisebbik számnak, ami azt jelenti, hogy a nagyobbik szám legalább 10-szerese a kisebbik számnak és ez nem lehetséges, mert a számjegyeik száma megegyezik. Tehát nincs két ilyen szám.  $\otimes$

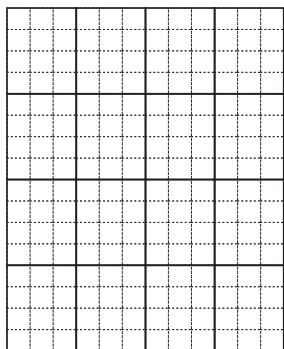
*Második megoldás.* A legkisebb felírható szám 2-sel kezdődik, a legnagyobb 9-essel és minden szám hétjegyű, tehát a szorzótényező nem lehet 4-nél nagyobb. Így csak azt kell megvizsgálni, hogy a szorzótényező lehet-e 2, 3 vagy 4. A továbbiakban igazoljuk, hogy a szorzótényező nem lehet sem 2, sem 3, sem 4. Ha a szorzó 2 lenne, akkor a szorzás elvégzése során minden számjegyet kellene szorozni 2-vel és a tíznél nagyobb eredmények esetén a túlcordulást tovább kellene adni. Ez a túlcordulás legfeljebb 1 lehet. A felsorolt számjegyek kétszereseinek az utolsó számjegye rendre 4, 6, 8, 0, 2, 6, 8. Mivel itt két 6-os jelenik meg, a túlcordulás legfeljebb 1 és az eredményben nem lehet 7-es, a szorzó nem lehet 2-es. Hasonló a gondolatmenet akkor is, ha a szorzó 3 lenne. Ebben az esetben a számjegyek 3-szorosainak a végződése 6, 9, 2, 5, 8, 4, 7. A túlcordulás legfeljebb 2 lehet, tehát a 9-esnél nem adhatunk hozzá semmit (különben 0 vagy 1 is megjelenne). Emiatt a 8-ashoz sem adhatunk hozzá semmit és így megjelenne a 7-es, vagy lenne két 8-as, esetleg két 9-es számjegy az eredményben. Mivel ez nem megengedett, a szorzó nem lehet 3 sem. Ha a szorzó 4 lenne, akkor a számjegyek 4-szeresének utolsó számjegyéhez hozzáadva az esetleges túlcordulásokat ugyanazokat a számjegyeket kellene kapjuk. De az adott számjegyek 4-szeresének az utolsó számjegye rendre 8, 2, 6, 0, 4, 8, 6 és a túlcordulás legtöbb 3. Így a két 6-osból és a két 8-asból az eredmény-

ben nem jelenhet meg pontosan egy 6-os, egy 8-as és egy 9-es. Az előbbieket alapján a szorzó nem lehet 4 sem, tehát a felírt számok közül nem választható kettő úgy, hogy az egyik a másikkal osztható.  
 $\otimes$

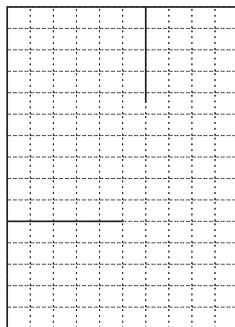
**8. Megjegyzés.** Mivel minden felírható szám 9-cel való osztási maradéka 1, ezért a szorzónak is 1 kellene legyen a 9-cel való osztási maradéka. Ez nem lehetséges mivel az összes felírható szám hétjegyű. Természetesen az előbbi ötletek összekombinálásából is adódhat a megoldás. Így például a második megoldásnál a 3-as szorzó kizárható a 3-mal való oszthatóság alapján is (hisz egyik szám sem osztható 3-mal).

**5. Feladat.** A mellékelt ábra *a*) részén egy téglalaprács látható. Ez azt jelenti, hogy két rögzített  $m$  és  $n$  szám esetén egy téglalap szembenfekvő oldalpárjait  $m$ , illetve  $n$  egyenlő részre osztottuk fel és a megfelelő osztópontokat összekötöttük az oldalakkal párhuzamos szakaszok segítségével (ezek a rácsvonalak). Így egy  $m \times n$ -es téglalaprács keletkezik. Az *a*) ábrán egy  $4 \times 4$ -es téglalaprács látható, amelynek a mérete  $12 \times 16$ , mert a rács  $3 \times 4$ -es téglalapokból áll. A *b*) ábrán látható  $10 \times 15$ -ös téglalap és a benne látható vastag (nem szaggatott vonallal húzott) szakaszok valamilyen téglalaprács maradványai, a többi vonalat valaki kiradírozta. Milyen lehetett az a téglalaprács, amit kiradíroztak? Legalább hány vonallal kell kiegészíteni a *b*) ábrát ahhoz, hogy olyan téglalaprácsot kapjunk, amelyben a folytonos vonalal meghúzott szakaszok a rácsvonalakra illeszkedjenek?





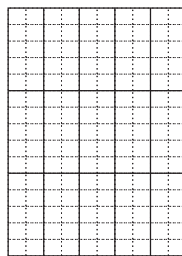
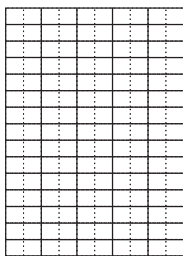
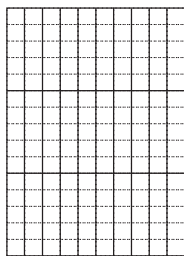
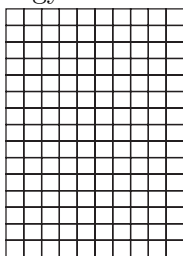
a)



b)

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

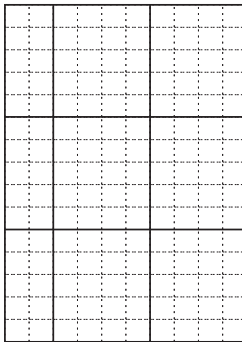
*Első megoldás.* A téglalaprács kis téglalapjainak méretei osztói a nagy téglalap méreteinek (pl. az a) ábrán 2 osztója 10-nek és 3 osztója 15-nek). A b) ábrán behúzott vonalak alapján a kis téglalapok vízszintes mérete osztója 6-nak is és 4-nek is, a függőleges mérete pedig osztója 5-nek és 10-nek is. Így a keletkezett kis téglalapok  $1 \times 1$ -esek,  $1 \times 5$ -ösök,  $2 \times 1$ -esek vagy  $2 \times 5$ -ösök. Ezekben az esetekben a téglalaprács  $10 \times 15$ -ös,  $10 \times 3$ -as,  $5 \times 15$ -ös vagy  $5 \times 3$ -as.



Az  $5 \times 3$ -as téglalaprács esetén kell a legkevesebb vonallal kiegészíteni az ábrát, ez pedig 6 vonal.  $\otimes$

*Második megoldás.* Első lépésben meghosszabbítjuk a meglévő

belső szakaszokat. Ez két vonal. Vízszintesen be kell húzni alulról a tizedik sor felső határoló vonalát és jobbról balra számolva a nyolcadik oszlop bal oldali határoló vonalát. Ez további 2 vonal. Ezekre azért van szükség, mert egy téglalapprácson ha két rácsvonal közt  $d$  a távoldág, akkor tetszőleges rácsvonaltól  $d$  távolságra (az oldalak mentén számolva) szintén rácsvonalnak kell lennie. Így a mellékelt ábrán látható alakzatot kapjuk.



Ennek az ábrának a bal oldalán a két függőleges vonal közti távolság 2, ezért további két vonal behúzása szükséges. Így legalább 6 vonal behúzása szükséges és ugyanakkor 6 vonal segítségével elérhető az, hogy téglalapprács ( $5 \times 3$ -as, amelyben az alaptéglalap mérete  $2 \times 4$ -es) keletkezzen.  $\otimes$

**9. Megjegyzés.** Általában ha behúzunk néhány vonalat, akkor ahhoz, hogy téglalapprácscsá kiegészíthetsük meg kell határozni külön az egyik irányú vonalak közt fellépő összes távolság legnagyobb közös osztóját és külön a másik irányú vonalak közt fellépő összes távolság legnagyobb közös osztóját. Ezek lesznek az alaptéglalap oldalhosszai.

**6. Feladat.** A Vuki nevű úrnép a Kashyyk bolygóról költözik az Endor bolygóra egyszemélyes űrhajókban. Az út megtételéhez egy űrhajónak 1 egységnyi hajtóanyagra van szüksége. Ugyanakkor,

ha csoportokban utaznak, akkor a fogyasztásuk csökken a következő szabályok szerint: 4-es csoportban a csoport fogyasztása 3, 10-es csoportokban 9, 100-as csoportokban 70 és 1000-es csoportokban 600 egység.

1. Határozd meg, hogy legalább mennyi üzemanyag szükséges az átköltözéshez, ha a létszám 35. Hát akkor, ha a létszám 258 vagy 3212?
2. Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  esetén határozd meg az  $n$  úrlény átköltöztetéséhez szükséges üzemanyag mennyiségét!

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

*Megoldás.* 1) Észrevehető, hogy nem éri meg 10-es csoportokban utazni, mert egy 10-es csoport helyett 10-en utazhatnak két 4-es és két 1-es csoportban, így pedig csak 8 egységnyi üzemanyagra van szükségük (míg a 10-es csoportnak 9-re). Másrészt ha van legalább négy úrhajó, akkor érdemesebb 4-es csoportban utazni, mint külön-külön a 4-nek. Így 35 úrhajónak nyolc 4-es és három 1-es csoportban érdemes utazni, ezzel 27 egységnyi üzemanyagot fogyasztanak.

100 úrhajó kevesebbet fogyaszt egy 100-as csoportban, mint 25 darab 4-es csoportban, így 258 úrhajó abban az esetben fogyaszt a legkevesebbet, ha két 100-as csoportban, tizennégy 4-es csoportban és két 1-es csoportban utaznak, így 184 egységnyi üzemanyagot fogyasztanak.

1000 úrhajó kevesebbet fogyaszt, ha egy csoportban utazik, mint tíz 100-as csoportban, így 3212 úrhajó esetén előbb a legtöbb 1000-es csoportot érdemes kialakítani, majd a maradékból a legtöbb 100-as csoportot és utána a legtöbb 4-es csoportot. Ez azt jelenti, hogy három 1000-es csoportban, két 100-as csoportban és három 4-es csoportban utaznak, így 1949 egységnyi üzemanyagot fogyasztanak.

2) A minimális mennyiségű üzemanyag fogyasztásához a legtöbb lehetséges 1000-es csoportot, majd a maradékból a legtöbb lehetséges 100-as csoportot, a maradékból a legtöbb lehetséges 4-es csoportot kell kialakítani, a többiek pedig 1-esével utaznak. Így, ha az  $n$ -nek 1000-rel való osztási hányadosa  $n_1$  és maradéka  $r_1$ , akkor  $n_1$  darab 1000-es csoportot alakítanak, az  $r_1$ -et pedig 100-as csoportokba osztják. Ha az  $r_1$ -nek 100-zal való osztási hányadosa  $n_2$  és maradéka  $r_2$ , akkor  $n_2$  darab 100-as csoportot alakítanak és a maradékot 4-es csoportokra osztják. Ha az  $r_2$ -nek 4-gyel való osztási hányadosa  $n_3$  és maradéka  $r_3$ , akkor  $n_3$  4-es csoportot alakítanak, a többi  $r_3$  pedig 1-esével utazik. Összesen tehát  $600n_1 + 70n_2 + 3n_3 + r_3$  egységnyi üzemanyagra van szükség.  $\otimes$

**10. Megjegyzés.** Ha  $n = \overline{Xabc}$ , ahol  $a, b, c$  számjegyek és  $X$  tetszőleges szám, akkor  $X$  darab 1000-es csoportot,  $a$  darab 100-as csoportot kell kialakítani. A maradék  $\overline{bc}$ -nek a 4-gyel való hányadosa ( $h$ ) és maradéka ( $r$ ) megadja, hogy hány 4-es csoport és hány egyedül utazó lesz. Összesen tehát a fogyasztás  $F = 600X + 70a + 3h + r$ . Mivel  $4h + r = \overline{bc}$ , ezért írhatjuk, hogy  $F = 600X + 70a + \overline{bc} - r$ .

## VII. osztály

**1. Feladat.** Fel lehet-e írni az  $1, 2, 3, \dots, 9$  számokat egy kör kerületére úgy, hogy bármelyik két szomszédos szám összegét számolva olyan számot kapjunk, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

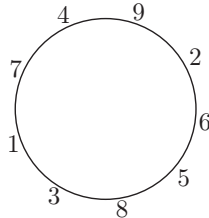
Nagy Olga, Nagyszalonta

*Megoldás.* A számokat egy kör kerületére írva mindeniknek két szomszédja lesz. A legkisebb összeg az  $1 + 2 = 3$ , a legnagyobb a  $8 + 9 = 17$ . Figyelembe véve, hogy két szomszédos szám összege

nem szabad osztható legyen sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel, a lehetséges összegek: 4, 8, 11, 13, 16, 17. Ekkor az egyes számok szomszédai a következők lehetnek:

|          |         |            |         |            |         |
|----------|---------|------------|---------|------------|---------|
| szám     | 1       | 2          | 3       | 4          | 5       |
| szomszéd | 3, 7    | 6, 9       | 1, 5, 8 | 7, 9       | 3, 6, 8 |
| szám     | 6       | 7          | 8       | 9          |         |
| szomszéd | 2, 5, 7 | 1, 4, 6, 9 | 3, 5, 9 | 2, 4, 7, 8 |         |

Mivel az 1-esnek, a 4-esnek és a 2-esnek csak a 3-7; 7-9; 9-6 lehetnek a szomszédai, ezért a 3-1-7-4-9-2-6 csak ilyen sorrendben követhetik egymást. A még fel nem használt számok közül a 6-ost csak az 5-ös, azt pedig csak a 8-as követheti, aminek a 3-as lesz a másik szomszédja. A kapott felírás teljesíti a feltételeket, és mivel minden lépés egyértelmű volt, csak ez az egy megoldás van.



⊗

**2. Feladat.** Egy 30-as létszámú osztályban a fiúk  $\frac{2}{3}$ -a és a lányok  $\frac{1}{2}$ -e együtt 90 perc alatt hámoz meg egy zsák almát. Ha a fiúk  $\frac{1}{2}$ -e és a lányok  $\frac{2}{3}$ -a venne részt a munkában, akkor 85 perc alatt végeznének. Feltételezzük, hogy mindenki ugyanolyan sebességgel dolgozik.

- a) Hány fiú és hány lány van az osztályban?
- b) Mennyi idő alatt hámozná meg a zsák almát, ha az egész osztály dolgozna?

Simon József, Csíkszereda

*Első megoldás.* a) Legyen  $f$  a fiúk és  $l$  a lányok száma. Ekkor  $f + l = 30$ , és

$$\frac{2}{3}f + \frac{1}{2}l \dots 90 \text{ perc}$$

$$\frac{1}{2}f + \frac{2}{3}l \dots 85 \text{ perc.}$$

Mivel a tanulók száma és a munka elvégzéséhez szükséges idő fordítottan arányos mennyiségek, ezért

$$\left(\frac{2}{3}f + \frac{1}{2}l\right) \cdot 90 = \left(\frac{1}{2}f + \frac{2}{3}l\right) \cdot 85.$$

Ebből átalakítások után kapjuk, hogy  $f = \frac{2}{3}l$ , amit behelyettesítve az  $f + l = 30$  összefüggésbe kapjuk, hogy 12 fiú és 18 lány van az osztályban.

b) Az első alpont alapján

$$\frac{2}{3}f + \frac{1}{2}l = \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 17$$

tanuló 90 perc alatt hámozza meg a zsák almát, így 30 tanuló-  
nak  $\frac{17 \cdot 90}{30} = 51$  percre van szüksége ugyanannyi alma meghá-  
mozásához.

⊗

*Második megoldás.* a) Mivel egyszerre csak egész számú fiú illetve lány hámozhatja az almákat, következik, hogy a fiúk és a lányok száma is osztható 2-vel is és 3-mal is, azaz osztható 6-tal. Mivel a második esetben rövidebb idő alatt hámoznák meg az almát, következik, hogy több lány van, mint fiú. Így a következő lehetséges esetek fordulhatnak elő: 0 fiú és 30 lány, 6 fiú és 24 lány vagy 12 fiú és 18 lány. Az első esetben 15 lány 90 perc alatt hámozná meg az összes almát, illetve 20 lány 85 perc alatt hámozná meg az összes almát, ez ellentmondás, mert  $15 \cdot 90 \neq 20 \cdot 85$ , ami 1 gyereknek szükséges idő. A második esetben 4 fiú és 12 lány 90 perc

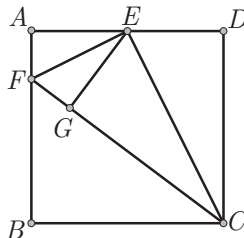
alatt hámozná meg az összes almát, míg 3 fiú és 16 lány 85 perc alatt, ami szintén ellentmondás, mert  $(4 + 12) \cdot 90 \neq (3 + 16) \cdot 85$ . A harmadik esetben 8 fiú és 9 lány 90 perc alatt hámozná meg az összes almát, míg 6 fiú és 12 lány 85 perc alatt, ami megfelel, mert  $(9 + 8) \cdot 90 = (6 + 12) \cdot 85 = 1530$ . Tehát 12 fiú és 18 lány van az osztályban.

b) Az a) alpont alapján egy gyerek 1530 perc alatt hámozná meg az összes almát, tehát 30 gyerek  $1530 : 30 = 51$  perc alatt hámozná meg az összes almát.  $\otimes$

**3. Feladat.** Az  $ABCD$  négyzetben jelöljük  $E$ -vel az  $AD$  oldal felezőpontját és  $F$ -fel az  $AB$  oldal  $A$ -hoz közelebb eső negyedelő pontját. Bizonyítsd be, hogy az  $E$  pontnak a  $CF$ -től mért távolsága egyenlő a négyzet oldalhosszának a felével!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

*Első megoldás.* Jelölje  $G$  az  $E$ -ből a  $CF$ -re húzott merőleges talppontját. Ha  $a$  a négyzet oldalhossza, igazolnunk kell, hogy  $EG = \frac{a}{2}$ .



Mivel az  $EDC$  és  $FAE$  derékszögű háromszögek befogóira igaz, hogy

$$\frac{ED}{FA} = \frac{DC}{AE} = 2,$$

ezért a két háromszög hasonló, és  $\frac{EC}{FE} = 2$ , valamint  $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{AEF})$ ,  $m(\widehat{CED}) = m(\widehat{EFA})$ , ahonnan  $m(\widehat{CEF}) = 90^\circ$ .

Ugyanakkor, mivel  $\frac{EC}{EF} = 2$  és  $\frac{DC}{DE} = 2$ , ezért az  $ECF$  és  $DCE$  derékszögű háromszögek is hasonlóak, így  $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ECF})$  és  $m(\widehat{CED}) = m(\widehat{CFE})$ . Mivel  $m(\widehat{GEC}) = 90^\circ - m(\widehat{ECG}) = 90^\circ - m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{CED})$ , ezért az  $ECG$  és  $ECD$  derékszögű háromszögek egybevágóak, tehát  $EG = ED = \frac{a}{2}$ .  $\otimes$

*Második megoldás.* Jelölje  $G$  az  $E$ -ből a  $CF$ -re húzott merőleges talppontját. Ha  $a$  a négyzet oldalhossza, igazolnunk kell, hogy  $EG = \frac{a}{2}$ .

Mivel az  $EAF$ ,  $CDE$  és  $ABC$  háromszögek derékszögűek, ezért Pitagorasz tétele alapján

$$EF = \frac{a\sqrt{5}}{4}, \quad EC = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad CF = \frac{5a}{4}.$$

A kapott értékek alapján  $CF^2 = EC^2 + EF^2$ , így Pitagorasz fordított tételéből következik, hogy az  $ECF$  háromszög derékszögű. Ekkor az  $EG$  magasságra igaz, hogy

$$EG = \frac{EF \cdot EC}{CF} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{\frac{5a}{4}} = \frac{a}{2}.$$

$\otimes$

**11. Megjegyzés.** A Pitagorasz-tétel alapján (esetleg területeket is használva) több különböző megoldás is adható, ezeknek a részletezésétől eltekintünk. Az ábrán látható, hogy az  $AFE$  és  $EDC$  háromszögeket az  $FE$ , illetve  $EC$  mentén behajtva a négyzet belsejébe  $A$  is és  $D$  is a  $G$ -be kerül. Erre az észrevételre is alapozható egy megoldás.

**4. Feladat.** Az  $ABCD$  téglalap  $AB$  oldalán felvesszük az  $M_1, M_2, M_3$  pontokat ( $A$ -tól  $B$  irányába ebben a sorrendben), a  $DC$  oldalán pedig az  $N_1, N_2, N_3$  és  $N_4$  pontokat ( $D$ -tól  $C$



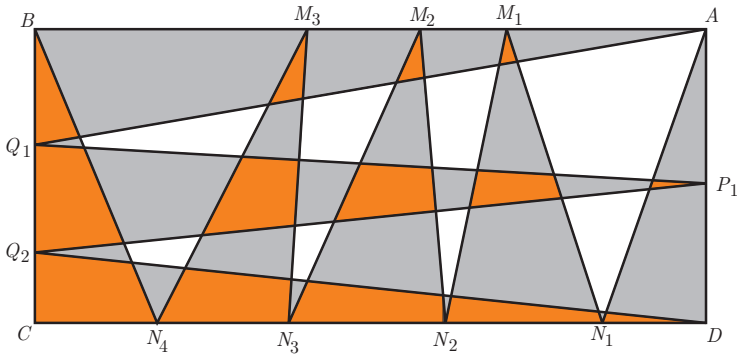
irányába ebben a sorrendben). Hasonlóan felvesszük a  $P_1 \in (AD)$  és  $Q_1, Q_2 \in (BC)$  pontokat ( $BC$ -n a sorrend  $B - Q_1 - Q_2 - C$ ). Tekintjük az  $AN_1M_1$ ,  $M_1N_2M_2$ ,  $M_2N_3M_3$ ,  $M_3N_4B$ , illetve a  $DQ_2P_1$  és  $P_1Q_1A$  háromszögeket. Az első négyet elsőfajúnak, az utolsó kettőt másodfajúnak (vagy vízszintesnek, illetve függőlegesnek) nevezzük. Jelölje  $T_1$  azon síkdarabkák területének összegét, amelyek egyaránt hozzátartoznak valamilyen első és másodfajú háromszöghöz, illetve  $T_2$ -vel azon síkdarabkák területének összegét, amelyek a téglalap belsejében vannak, de nem tartoznak sem elsőfajú, sem másodfajú háromszöghöz. Bizonyítsd be, hogy  $T_1 = T_2$ !

Simon József (feladata alapján), Csíkszereda

*Megoldás.* Látható, hogy az elsőfajú háromszögek területének összege ugyanannyi, mint a másodfajú háromszögek területének összege és mindkét összeg egyenlő a téglalap területének felével (mert a téglalap oldalaira illeszkedő oldalak összege épp az egyik oldal hosszával egyenlő és a magasság a másik oldal hosszával). A mellékelt ábrán azokat a darabokat, amelyek elsőfajú és másodfajú háromszögekhez is tartoznak fehéren hagytuk, azokat, amelyek egyik fajú háromszöghöz sem tartoznak sötétszürkére, a többit világos szürkére színeztük. Ha  $S$ -sel jelöljük világos szürke rész területét és  $T$ -vel a téglalap területét, akkor felírhatjuk, hogy

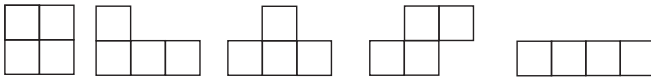
$$2T_1 + S = T \text{ és } 2T_2 + S = T,$$

mert az első esetben a darabkák összesen kiadják az elsőfajú és a másodfajú háromszögek területét, a második esetben az ezeken kívüli, de a téglalaphoz tartozó darabok területét. Ebből következik, hogy  $T_1 = T_2$ .



**12. Megjegyzés.** A tulajdonság természetesen számolással is ellenőrizhető, csak az oldalakon keletkező mindenik kis szakasz hosszára valamilyen jelölést kell alkalmazni, és ennek függvényében ki kell számolni a darabkák területét. Az előbbi megoldásból látható, hogy az első, illetve másodfajú háromszögek száma tetszőleges lehet.

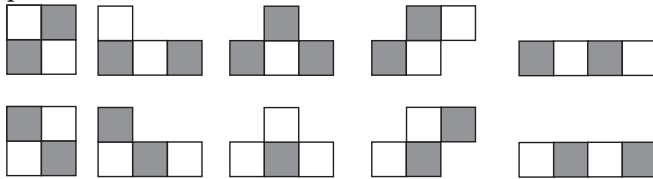
**5. Feladat.** A mellékelt ábrán látható darabokból össze lehet-e rakni egy téglalapot úgy, hogy mindenik darabot felhasználjuk és ne keletkezzen sem átfedés, sem üres rész a téglalapon?



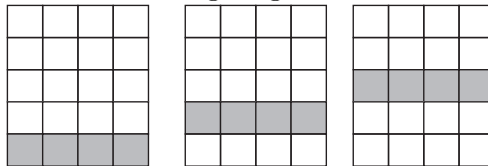
SimpleX Egyesület, Csíkszereda

*Első megoldás.* A darabok összesen 20 kis négyzetet tartalmaznak, tehát ha össze lehet rakni belőlük egy téglalapot, akkor annak a téglalagnak legalább az egyik oldala páros hosszúságú. Emiatt ha azt sakktáblaszerűen kiszínezzük, ugyanannyi világos mezőt kapunk, mint sötétet. Tehát a darabok összesen ugyanannyi világos mezőt kell lefedjenek, mint sötétet. Másrészt, ha

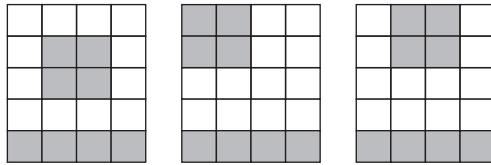
a darabokat külön-külön színezzük ki sakktáblaszerű színezéssel (minden darabot kétféleképpen színezhetünk), akkor az egyik darab (a harmadik) az egyik színből több négyzetet tartalmaz, míg az összes többi mindkét színű négyzetből  $2 - 2$  darabot tartalmaz. Ez azt mutatja, hogy az adott darabokból nem lehet téglalapot összerakni.



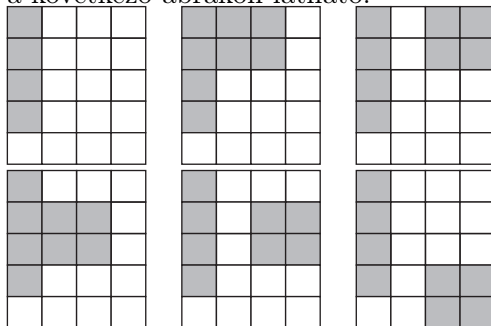
*Második megoldás.* A megadott darabok összesen 20 kis négyzetecskét tartalmaznak, tehát ha ki lehet rakni belőlük téglalapot, akkor annak a mérete csak  $1 \times 20$ ,  $2 \times 10$  vagy  $4 \times 5$  lehet. Az első két méret nem lehetséges a darabok alakja miatt (az  $1 \times 20$ -as téglalapon az első darab nem fér el, a  $2 \times 10$ -esen az utolsó darab két középső négyzete mellett üres maradna), tehát csak a  $4 \times 5$ -ös téglalapot kell megvizsgálni. Ebben az esetben megvizsgáljuk, hogy hová kerülhet az utolsó  $1 \times 4$ -es darab. Ha a rövidebb oldallal párhuzamos, akkor a szimmetria miatt elégséges a következő három esetet megvizsgálni:



Az utolsó kettő nem lehetséges, mert a többi darabot nem lehet elhelyezni. Az első esetben a  $2 \times 2$ -es darabnak a  $4 \times 4$ -es részen való elhelyezésére vonatkozóan a szimmetria miatt a következő eseteket szükséges tovább vizsgálni:



Látható, hogy egyik esetben sem lehet a többi darabot elhelyezni. Ha az  $1 \times 4$ -es darab a hosszabb oldallal párhuzamos, akkor a szimmetria miatt elégséges itt is csak 3 esetet megvizsgálni és ezekből (akárcsak az előbb) csak azt kell tovább vizsgálni, amikor az  $1 \times 4$ -es darab a téglalap oldalára illeszkedik. Ez esetben a  $2 \times 2$ -es darab elhelyezésére 8 lehetőség van. Ebből 2-t eleve kizárhatunk, mert keletkezik olyan rész amit nem lehet lefedni. A többi eset a következő ábrákon látható:



Mindegyik esetben a további 1 vagy 2 darab elhelyezésére egyetlen lehetőség van (különben már egy lépésben ellentmondáshoz jutunk), és mindegyik esetben olyan rész keletkezik a téglalapon, amit nem tudunk lefedni. Tehát az adott darabokból, az adott feltételekkel nem lehet téglalapot összerakni.  $\otimes$

**6. Feladat.** Három biciklis egy túrán vesz részt, amely abból áll, hogy az  $A$  helységig vonattal utaznak, onnan a  $B$  helységig bicikliznek, majd  $B$ -ből vonattal térnek haza. Az  $A$  és  $B$  közti szakaszon egy  $C$  pontban az egyikük biciklije használhatatlanná (és javíthatatlanná) vált (becsúszott egy szakadékba). Gyalogosan a

sebességük 4 km/h és biciklivel 16 km/h. A  $C$  és  $B$  távolsága (a vasútállomásig) 24 km, az  $A$  és  $C$  távolsága 60 km és  $B$ -ből 3 és fél óra múlva lenne vonatjuk hazafele. Elérhetik-e mindhárman ezt a vonatot, ha a megmaradt biciklik egyikére sem ülhetnek egyszerre ketten?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

*Megoldás.* A megoldás alapötlete abból áll, hogy ketten elindulnak biciklin, a harmadik gyalog és az egyik biciklit út közben otthagyják valahol úgy, hogy a harmadik elvehesse, a másik biciklivel meg az a két gyerek ismétli meg ugyanezt, aki biciklin indult. Jelöljük a gyerekeket  $X, Y, Z$ -vel. Egy lehetőség a következő:

- $X$  és  $Y$  elindul biciklivel,  $Z$  gyalog;
- $X$  leteszi a biciklit 16 km után és gyalog megy tovább  $B$ -ig;
- $Y$  leteszi a biciklit 8 km után, megy 8 km-t gyalog és utána elveszi azt a biciklit, amit  $X$  hagyott el az út mentén, majd ezzel megy  $B$ -ig;
- $Z$  megy 8 km-t gyalog, majd elveszi azt a biciklit, amit  $Y$  letett és ezzel megy  $B$ -ig.

Így mindhárman 8 km-t tettek meg gyalog és 16 km-t biciklin, tehát 3 óra alatt mind elérnek  $B$ -be. A feladat megoldásához ez elégséges is, hisz a kérdés az volt, hogy elérhetik-e a vonatot, ami 3,5 óra múlva indul.

A továbbiakban igazoljuk azt is, hogy az előbbi terv a legjobb, vagyis kevesebb, mint 3 óra alatt nem érhetnek el. Jelölje  $x_1, x_2$  és  $x_3$  a három gyerek által gyalogosan megtett út hosszát és  $y_1, y_2$ , valamint  $y_3$  a biciklin megtett út hosszát. Ezekkel a jelölésekkel  $x_i + y_i = 24$ , ha  $1 \leq i \leq 3$ . Mivel a biciklit nem érdemes

menetközben elhagyni (úgy, hogy a végén a bicikli ne érjen  $B$ -be) és nem érdemes a biciklivel visszafele menni, írhatjuk, hogy  $y_1 + y_2 + y_3 = 48$ , tehát  $x_1 + x_2 + x_3 = 24$ . Ha  $t_1, t_2$  és  $t_3$  a gyerekek menetideje, akkor

$$t_i = \frac{x_i}{4} + \frac{y_i}{16}, 1 \leq i \leq 3,$$

tehát ha  $t = \max\{t_1, t_2, t_3\}$ , akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} t &\geq \frac{x_1}{4} + \frac{y_1}{16} \\ t &\geq \frac{x_2}{4} + \frac{y_2}{16} \\ t &\geq \frac{x_3}{4} + \frac{y_3}{16} \end{aligned}$$

Az előbbieket alapján

$$3t \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{16},$$

vagyis

$$t \geq 3.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha  $x_1 = x_2 = x_3 = 8$  és  $y_1 = y_2 = y_3 = 16$ .  $\otimes$

**13. Megjegyzés.** Természetesen a vonat elérését végtelen sok más cserélgetéssel is el lehet érni, hisz a fél óra plussz idő miatt nem szükséges meghatározni a minimumot. Ugyanakkor az előbb vázolt kivitelezésen kívül is végtelen sok olyan kivitelezés van, ami biztosítja azt, hogy a gyerekek a legrövidebb idő alatt érnek oda. Egy ilyen lehetőség, ha előbb az út felét teszik meg az előbb leírt módon (ekkor a gyalog, illetve biciklivel megtett utak hossza 4 km illetve 8 km az első szakaszban és ugyanannyi a másodikban), majd a másik felét. Egy rokon feladat megoldása

megtalálható a Matlap 2012/8-as számában (két gyerek és egy bicikli esetén) és a feladat általános tárgyalása megtalálható a <http://simplexportal.ro/tananyag/primas/kivancsisagvezerelt-matematika-tanitas> címen a PRIMAS projekt 2010-es kiadványának első fejezetében.

## VIII. osztály

**1. Feladat.** Hány olyan sík van, amely egy adott kocka csúcsai közül legalább háromra illeszkedik?

Róka Sándor, Nyíregyháza

*Első megoldás.* Legyen a kocka  $ABCD A' B' C' D'$ . Számoljuk meg, hogy a kocka nyolc csúcsából hányféleképpen választhatunk ki hármat.

Az első csúcsot 8-féleképpen, a másodikat 7-féleképpen, a harmadikat pedig 6-féleképpen választhatjuk ki. Ez összesen  $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$  lehetőség. Viszont minden csúcshármas hatszor számoltunk meg (pl.  $(A, B, C)$ ,  $(A, C, B)$ ,  $(B, A, C)$ ,  $(B, C, A)$ ,  $(C, A, B)$ ,  $(C, B, A)$ ). Tehát a nyolc csúcsból  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ -féleképpen választhatunk ki hármat.

Most számoljuk meg hogy hány sík illeszkedik éppen négy csúcsra. A kocka hat lapja meghatároz 6 ilyen síkot. Ezekhez még hozzá kell számoljuk azokat a síkokat, amelyeket két olyan él határoz meg, amelyek egymással párhuzamosak, de nincsenek ugyanazon a lapon. Ezekből is 6 van ( $(ABC'D')$ ,  $(BCD'A')$ ,  $(CDA'B')$ ,  $(DAB'C')$ ,  $(ACC'A')$  és  $(BDD'B')$ ).

Tehát 12 sík illeszkedik éppen négy csúcsra. Ez azt jelenti, hogy az 56 esetből 12 esetben négyszer számoltuk ugyanazt a síkot (pl. az  $(ABC)$ ,  $(ABD)$ ,  $(ACD)$  és  $(BCD)$  síkok ugyanazt az  $(ABCD)$  síkot határozzák meg).

Tehát azon síkok száma, amelyek a kocka csúcsai közül legalább háromra illeszkednek:  $56 - 12 \cdot 3 = 20$ .  $\otimes$

*Második megoldás.* Nevezzük az  $(ABCD)$  síkot *lenti* síknak, az  $(A'B'C'D')$  síkot pedig *fenti* síknak. Három kiválasztandó csúcsból vagy mindhárom fent van, vagy kettő van fent és egy lent, vagy egy van fent és kettő lent, vagy mindhárom lent van.

- Ha a lenti csúcsok száma 0, akkor mindhárom csúcs fent van és ezek a csúcsok meghatároznak egy síkot (ezt már többet nem számoljuk).
- Ha egy csúcs van lent (azaz kettő fent van), akkor az alábbi táblázatot gyorsan kitölthetjük. Az  $A$  sorával kezdjük, végighaladunk rajta balról jobbra, majd jön szerre a  $B$ ,  $C$ , illetve  $D$  sora. Azt is megjelöljük, hogy ugyanabban az oszlopban egy lennebb található síkot melyik fennebbi miatt nem kell számoljuk.

|     | $A'B'$   | $B'C'$   | $C'D'$   | $D'A'$   | $A'C'$   | $B'D'$   |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $A$ | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| $B$ | 0( $A$ ) | 1        | 0( $A$ ) | 1        | 1        | 1        |
| $C$ | 1        | 0( $B$ ) | 1        | 0( $B$ ) | 0( $A$ ) | 1        |
| $D$ | 0( $C$ ) | 0( $A$ ) | 0( $C$ ) | 0( $A$ ) | 1        | 0( $B$ ) |

- Ha két csúcs van lent (azaz egy van fent), akkor már sokkal könnyebb dolgunk van, mivel az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  és  $DA$  szakaszokat nem kell társítsuk fent semmivel (pl. az  $AB$  szakasz esetében már az  $(ABB'A')$  és az  $(ABC'D')$  síkokat is



számoltuk már előzőleg).

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
|    | A' | B' | C' | D' |
| AB | 0  | 0  | 0  | 0  |
| BC | 0  | 0  | 0  | 0  |
| CD | 0  | 0  | 0  | 0  |
| DA | 0  | 0  | 0  | 0  |
| AC | 0  | 1  | 0  | 1  |
| BD | 1  | 0  | 1  | 0  |

- Ha mindhárom csúcs lent van, akkor ezek a csúcsok ismét egy síkot határoznak meg.

Írjuk külön táblázatba, amit az előzőekben megszámloltunk:

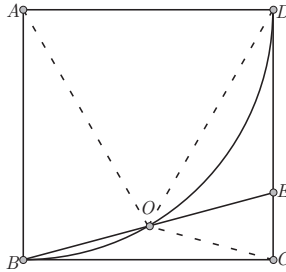
| Lenti csúcsok száma          | Síkok száma |
|------------------------------|-------------|
| 0                            | 1           |
| 1                            | 14          |
| 2                            | 4           |
| 3                            | 1           |
| <b>Síkok száma összesen:</b> | <b>20</b>   |

⊗

**2. Feladat.** Az  $ABCD$  négyzet  $(CD)$  oldalán vegyük fel az  $E$  pontot úgy, hogy az  $A$  középpontú  $AB$  sugarú kör felezze a  $(BE)$  szakaszt. Számítsd ki az  $\widehat{EBC}$  szög mértékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

*Első megoldás.* Jelölje a  $BE$  szakasz felezőpontját  $O$  és legyen  $m(\widehat{EBC}) = \alpha$ .



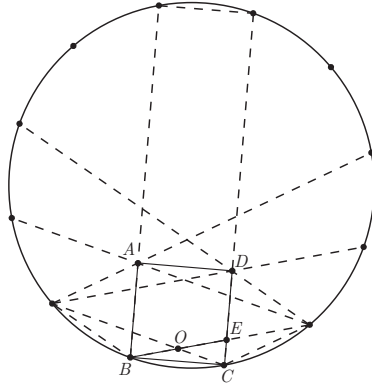
A  $BCE$  háromszög derékszögű, ezért köré írt körének középpontja éppen  $O$ , tehát  $OB = OE = OC$ . A  $BOC$  háromszög egyenlő szárú, tehát  $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{BCO}) = \alpha$ . A  $COE$  háromszög is egyenlő szárú, tehát  $m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{OCE}) = 90^\circ - \alpha$ . A  $BAO$  háromszög is egyenlő szárú, mivel  $AB = AO$  (mindkettő az  $A$  középpontú és  $AB$  sugarú kör sugara), így  $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{AOB}) = 90^\circ - \alpha$ . Ekkor a  $BAO$  háromszög kongruens a  $CDO$  háromszöggel ( $AB = DC$ ,  $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{OCE}) = 90^\circ - \alpha$ , illetve  $OB = OC$ ), azaz  $AO = DO$ . Ebből viszont következik, hogy az  $AOD$  háromszög egyenlő oldalú, azaz  $m(\widehat{AOD}) = 60^\circ$ . Az  $O$  pont körüli szögeket tekintve:

$$360^\circ = m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{COB}) + m(\widehat{AOB}) = \\
 60^\circ + (90^\circ - \alpha) + (180^\circ - 2\alpha) + (90^\circ - \alpha),$$

azaz  $\alpha = 15^\circ$ . ⊗

*Második megoldás.* Tekintsünk egy szabályos 12-szöget a mellékelt ábra jelöléseivel. Ekkor  $m(\widehat{EBC}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{12} = 15^\circ$ . Az  $ABCD$  négyszögben  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD}) = 6 \cdot 15^\circ = 90^\circ$ . Az  $AB$ , illetve  $CD$  oldalakra az  $ABCD$  négyszögon kívül az ábrán

egyenlő oldalú háromszögek vannak szerkesztve, mivel ezek szögei  $60^\circ$ -osak. Tehát az  $ABCD$  négyszög négyzet. A  $BOC$  háromszög egyenlő szárú ( $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{OCB}) = 15^\circ$ ), azaz az  $O$  pontból a  $BC$  oldalra húzott merőleges a  $BC$  oldalt felezi és merőleges is rá. Következik, hogy ez a merőleges a  $BCE$  háromszögben középvonal, tehát  $OB = OE$ . Szimmetriai okok miatt  $OA = OD$  és mindkettő egyforma a  $12$ -szög oldalával, és így az  $A$  középpontú,  $AB$  sugarú kör átmegy az  $O$ -n.



⊗

**14. Megjegyzés.** Az első megoldás jelöléseit és ábráját használva és feltételezve, hogy a négyzet oldala egységnyi, kiszámolható minden berajzolt szakasz hossza.

Mivel a  $BAO$  egyenlő szárú háromszög hasonló a  $COE$  egyenlő szárú háromszöggel (megfelelő szögeik kongruensek), ezért  $\frac{AB}{OC} = \frac{OB}{EC}$ , azaz  $\frac{1}{\frac{BE}{2}} = \frac{\frac{BE}{2}}{EC}$ , tehát  $BE^2 = 4EC$ .

A  $BCE$  derékszögű háromszögben Pitagorász tétele szerint:  $BE^2 = BC^2 + EC^2$ , azaz  $4EC = 1 + EC^2$ , ahonnan  $EC = 2 - \sqrt{3}$ . (Az  $x^2 - 4x + 1 = 0$  másodfokú egyenletnek a gyökei:  $x_1 = 2 - \sqrt{3}$  és  $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ , de ezek közül azt kell kiválasszuk, amelyik 1-nél kisebb, mivel  $EC < 1$ .)

Tehát szintén a  $BCE$  derékszögű háromszögben:  $\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$ , azaz sikerült meghatározni a kért szögnek egy szögfüggvényét.

**3. Feladat.** A KEDVED szóban minden betű helyett valamilyen tízes számrendszerbeli számjegyet írtunk (azonos betűk helyére azonos számjegyeket). Milyen számjegyet helyettesítettünk az  $E$  betű helyére, ha a kapott szám négyzetszám, a  $V$  helyére 4-gyel nagyobb számot helyettesítettünk, mint a  $K$  helyére és a  $D$  helyére a 4-et helyettesítettük?

Bencze Mihály, Brassó

*Megoldás.* A megadott feltételek alapján létezik olyan  $x$  természetes szám, amelyre

$$x^2 = \overline{KEDVED} = 1001 \cdot \overline{KE4} + 400.$$

Ez alapján  $x$  páros és

$$(x - 20)(x + 20) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{KE4}.$$

Ugyanakkor  $300 < x < 1000$ , tehát sem  $x - 20$ , sem  $x + 20$  nem osztható 1001-gyel. Emiatt a következő eseteket szükséges tárgyalni:

- $(x - 20) \dot{:} 7 \cdot 11$  és  $(x + 20) \dot{:} 13$ . Ebben az esetben  $x = 77k + 20$  és  $(77k + 40) \dot{:} 13$ . De  $77k + 40 = 78k + 39 - k + 1$ , tehát  $(k - 1) \dot{:} 13$  és így  $k = 13v + 1$ , ahonnan a nagyságrendi becslés és az  $x$  paritása alapján ellentmondáshoz jutunk.
- $(x - 20) \dot{:} 7 \cdot 13$  és  $(x + 20) \dot{:} 11$ , tehát  $x = 91k + 20$  és  $(91k + 40) \dot{:} 11$ . Ebből következik, hogy  $k = 11v + 5$  alakú és ismét ellentmondáshoz jutunk (mert  $k$  nem lehet 11-nél nagyobb és párosnak kell lennie ahhoz, hogy  $x$  is páros legyen).

- $(x-20) \dot{=} 11 \cdot 13$  és  $(x+20) \dot{=} 7$ , tehát  $x = 143k+20$  és  $143k+40$  osztható 7-tel. Ez csak akkor lehetséges, ha  $3k+5$  osztható 7-tel, vagyis ha  $k = 7v+3$ . De  $k$  nem lehet nagyobb, mint 7, és  $k$  páros ezért ebben az esetben sincs megoldás.

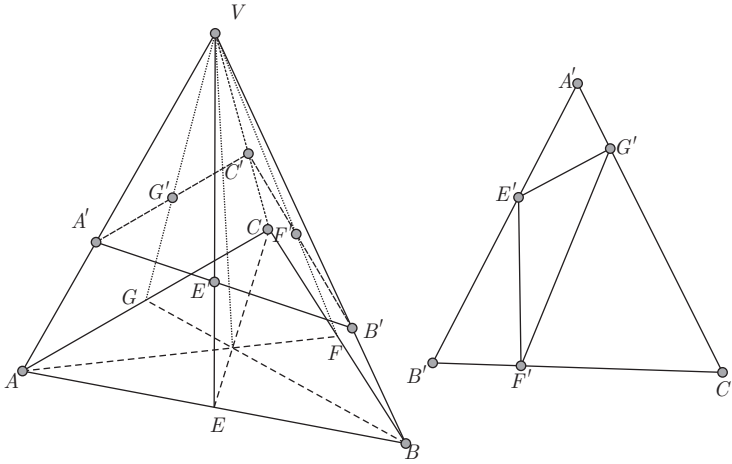
Hasonlóan meg kell vizsgálni a  $(x-20) \dot{=} 7$ ,  $(x+20) \dot{=} 11 \cdot 13$ , az  $(x-20) \dot{=} 11$ ,  $(x+20) \dot{=} 7 \cdot 13$ , illetve az  $(x-20) \dot{=} 13$ ,  $(x+20) \dot{=} 7 \cdot 11$  eseteket is. Ezekben az esetekben csak az  $x = 552$  megoldás adódik, ahonnan  $552^2 = 304704$ , tehát az  $E$  helyére 0-t helyettesítettünk.

⊗

**4. Feladat.** A  $VABC$  szabályos háromoldalú gúlában  $O$  az  $ABC$  alap középpontja,  $A' \in (VA)$ ,  $B' \in (VB)$  és  $C' \in (VC)$ . Jelöljük  $E, F$  és  $G$ -vel rendre az  $AB, BC$ , illetve  $CA$  oldal felezőpontját és tekintjük az  $\{E'\} = VE \cap A'B'$ ,  $\{F'\} = VF \cap B'C'$ , valamint  $\{G'\} = VG \cap C'A'$  metszeteket. Számítsuk ki az  $E'F'G'$  és az  $A'B'C'$  háromszögek területének arányát a  $VA' = a$ ,  $VB' = b$  és  $VC' = c$  hosszúságok függvényében!

Simon József, Csíkszereda

*Megoldás.* a)  $[VE], [VF]$  és  $[VG]$  a  $VABC$  szabályos háromoldalú gúla apotémái, tehát a  $VAB, VBC$  és  $VAC$  egyenlő szárú háromszögek szögfelezői is. Így  $[VE'], [VF']$  és  $[VG']$  a  $VA'B', VB'C'$  és  $VC'A'$  háromszögekben is szögfelezők. A szögfelező-tétel alapján írhatjuk, hogy  $\frac{VA'}{VB'} = \frac{A'E'}{E'B'} = \frac{a}{b}$ ,  $\frac{VB'}{VC'} = \frac{B'F'}{F'C'} = \frac{b}{c}$  és  $\frac{VC'}{VA'} = \frac{C'G'}{G'A'} = \frac{c}{a}$ . Származtatással a következő aránypárokat kapjuk:  $\frac{A'E'}{A'B'} = \frac{a}{a+b}$ ,  $\frac{B'F'}{B'C'} = \frac{b}{b+c}$  és  $\frac{A'G'}{A'C'} = \frac{a}{a+c}$ .



Ezeket felhasználva, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{T_{A'E'G'}}{T_{A'B'C'}} &= \frac{A'E' \cdot A'G' \cdot \sin(\widehat{E'A'G'}) \cdot \frac{1}{2}}{A'B' \cdot A'C' \cdot \sin(\widehat{B'A'C'}) \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{A'E'}{A'B'} \cdot \frac{A'G'}{A'C'} \\ &= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c} \\ &= \frac{a^2}{(a+b)(a+c)} \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{T_{B'F'E'}}{T_{B'C'A'}} = \frac{b^2}{(b+c)(b+a)}$$

és

$$\frac{T_{C'F'G'}}{T_{C'A'B'}} = \frac{c^2}{(c+a)(c+b)}.$$

Az előbbi három egyenlőség alapján

$$\frac{T_{E'F'G'}}{T_{A'B'C'}} = \frac{T_{A'B'C'} - T_{A'E'G'} - T_{B'F'E'} - T_{C'F'G'}}{T_{A'B'C'}}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{T_{A'E'G'}}{T_{A'B'C'}} - \frac{T_{B'F'E'}}{T_{A'B'C'}} - \frac{T_{C'F'G'}}{T_{A'B'C'}} \\
 &= 1 - \frac{a^2}{(a+b)(c+a)} - \frac{b^2}{(b+c)(a+b)} - \frac{c^2}{(b+c)(c+a)} \\
 &= \frac{(a+b)(b+c)(c+a) - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
 &= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.
 \end{aligned}$$

⊗

**15. Megjegyzés.** Érvényes az következő általánosabb tulajdonság is (a bizonyítás gondolatmenete ugyanaz):

Ha  $VABC$  egy tetszőleges háromoldalú gúla,  $A' \in (VA)$ ,  $B' \in (VB)$  és  $C' \in (VC)$  úgy, hogy

$$\frac{VA'}{VA} = a, \quad \frac{VB'}{VB} = b, \quad \frac{VC'}{VC} = c,$$

valamint  $E \in (AB)$ ,  $F \in (BC)$  és  $G \in (CA)$  úgy, hogy

$$\frac{AE}{EB} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \frac{BF}{FC} = \frac{k_3}{k_2}, \quad \frac{CG}{GA} = \frac{k_1}{k_3}$$

továbbá  $\{E'\} = VE \cap A'B'$ ,  $\{F'\} = VF \cap B'C'$  és  $\{G'\} = VG \cap C'A'$ , akkor

$$T = \frac{2abck_1k_2k_3}{(ak_2 + bk_1)(bk_3 + ck_2)(ck_1 + ak_3)}.$$

**5. Feladat.** Egy régi típusú kenyérpíró egyszere egy vagy két szelet kenyeret tud pírítani, de minden betett szeletnek csak az egyik oldalát. Egy oldal pírításához szükséges idő 50 másodperc, a szeleteket nem szabad túlsütni, egy szelet kivetéséhez vagy betetéséhez külön-külön 1,5 másodperc és a megfordításához 2

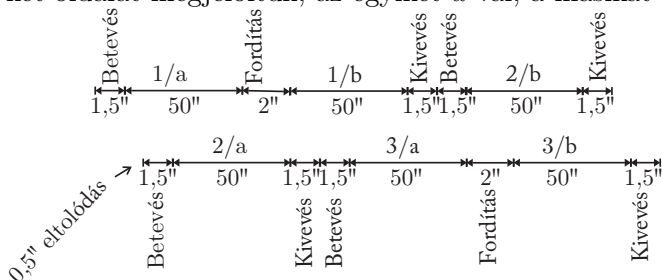
másodperc szükséges. Minden művelet (betevés, kivevés, megfordítás) végrehajtásához mindkét kezünkre szükség van, tehát nem lehet két műveletet egyszerre végrehajtani. Legkevesebb mennyi idő alatt lehet megpirítani ezen a pirítón 3 szelet kenyér mindkét oldalát?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

*Első megoldás.* A három szelet kenyérnek összesen 6 oldala van. Ha a 6 oldalból a pirító egyik oldalán legalább 4-et pirítunk, akkor az több, mint  $200''$  (200 másodperc), tehát azt kell elérnünk, hogy a pirító mindkét oldalán a kenyerek oldalaiból 3 – 3 piruljon meg (ennél kevesebb nem lehet). Ehhez az egyik szelet kenyér egyik oldalának megpirítása után a szelet kenyeret ki kell venni és be kell tenni egy másik szeletet. Ha a pirító egyik oldalát nézzük, akkor itt a 3 szelet megpirításához  $150''$  szükséges. Ezen kívül a három oldal megsütése után legalább 2-szer ki kell venni a szeletet (azt, amelyiknek nem itt sül mindkét oldala és a másik szeletet, amelynek itt sül mindkét oldala), ezeket be is kell tenni és az egyiket meg is kell fordítani (hisz mindhárom oldalnak valahogyan be kell kerülnie a sütőbe és ez csak a betevéssel, illetve az oldalcserével történhet meg). Ez azt mutatja, hogy a pirító egyik oldalának a használata legalább  $150 + 4 \cdot 1,5 + 2 = 158$  másodpercbe telik. Másrészt mindkét oldalon nem kezdhetünk egyszerre, mert akkor a két betevést egyidőben kellene végrehajtani. Emiatt a pirító két oldalának a kihasználása közt legalább egy  $1,5''$ -es eltolódásnak kell lenni és így a teljes idő nem lehet kisebb, mint  $159,5''$ . Másrészt ha az első szelet betevése után rögtön betesszük a második szeletet (ahhoz, hogy az eltolódás a sütő két oldalának kihasználása közt a legkisebb legyen), akkor az első szelet első oldalának elkészülése után a második szelet elkészüléséig  $1,5''$  marad. Ha ezalatt ezt a szeletet megfordítjuk, akkor  $0,5''$ -cel túlsülne a második kenyér. Ezt úgy küszöbölhetjük



ki, hogy ennyivel később tesszük be az elejét. Így ebben az esetben az összigő legalább  $160''$  lesz. A mellékelt ábra mutatja, hogy ez lehetséges is. A szeleteket megszámoztuk 1-től 3-ig és minden szelet két oldalát megjelöltük, az egyiket  $a$ -val, a másikat  $b$ -vel.



Ha az első szelet első oldalának elkészülése után ezt a szeletet kivesszük, akkor annak függvényében, hogy a második szelettel mit csinálunk (kivesszük vagy megfordítjuk), legalább  $1,5''$ -ig kihasználatlan marad a sütő első oldala. Emiatt az összigő legalább  $161''$  lenne, tehát ezek az esetek több időt igényelnek, mint az ábrán látható.  $\otimes$

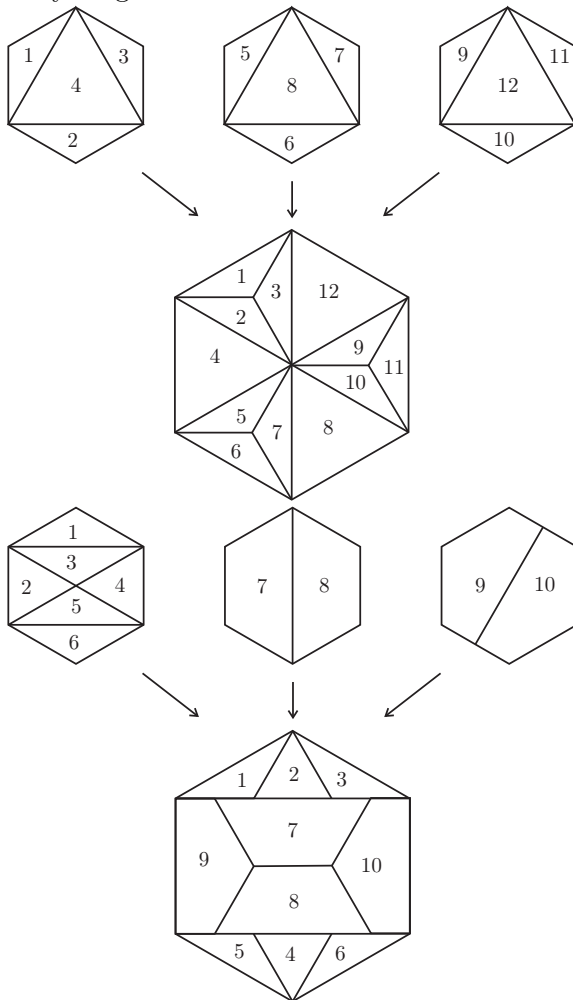
**16. Megjegyzés.** Érdemes elgondolkodni azon, hogy több szelet kenyér esetében hogy néz ki az optimális ütemezés, illetve hogyan indokolható az ütemezés optimalitása.

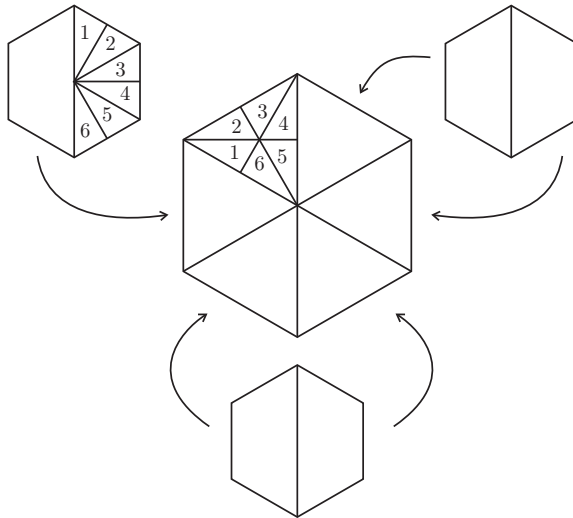
**6. Feladat.** Három egybevágó, szabályos hatszög alakú papírlapot vágj szét darabokra úgy, hogy a keletkezett darabokból egy nagyobb szabályos hatszöget lehessen összerakni!

Nagy Örs, Marosvásárhely

*Megoldás.* Ha  $T$ -vel jelöljük az adott hatszögek területét, akkor a három hatszög területe  $3T$ , tehát a nagy hatszög oldalhossza az adott hatszögek oldalának a  $\sqrt{3}$ -szorosa. Ez segíthet egyrészt rájönni egy lehetséges felvágásra, másrészt a felvágás helyességének ellenőrzésére. A mellékelt ábrák három lehetséges

megoldást mutatnak. Természetesen mindhárom ábra esetén a teljes megoldáshoz az is hozzátartozik, hogy igazoljuk az át-  
 darabolás helyességét.





A harmadik ábra esetén mindhárom hatszög felét 6 egybevágó háromszögre bontottuk. Ha az eredeti hatszögek oldalhossza  $l$ , akkor ezeknek a kis háromszögeknek az oldalai  $l/2$ ,  $l\sqrt{3}/2$  és  $l$ . Másrészt ha a nagy hatszög oldalhossza  $l\sqrt{3}$  (azt már beláttuk, hogy ennyi kell legyen), akkor a belsejében keletkező kis háromszögek oldalhosszai  $l\sqrt{3}/2$ ,  $l/2$  és  $l$ . Ez alapján az eredeti hatszögek fele átdarabolható a nagy hatszög egyhatodnyi darabjába az ábrának megfelelő módon, tehát a három hatszögből valóban előállítható egy nagyobb, szintén szabályos hatszög.  $\otimes$

**17. Megjegyzés.** A Bolyai-Gerwien tétel alapján bármely két azonos területű sokszög átdarabolható egymásba véges sok darab felhasználásával. Emiatt az átdarabolás végtelen sok különböző módon kivitelezhető.

## A javító tanárok névsora

|                    |  |
|--------------------|--|
| Dr. András Szilárd | BBTE, Kolozsvár                                |
| Dr. Bencze Mihály  | Áprily Lajos főgimnázium, Brassó               |
| Csapó Hajnalka     | Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda       |
| Dáni Zsuzsa        | Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely     |
| Dávid Géza         | Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely        |
| Kéry Hajnal        | Bihar megyei tanfelügyelőség, Nagyvárad        |
| Mastan Eliza       | Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya       |
| Mátéfi István      | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely  |
| Nagy Enikő         | Szent László Római Katolikus Líceum, Nagyvárad |
| Nagy Gyöngyi       | Szacs vay Imre Általános Iskola, Nagyvárad     |
| Nagy Örs           | Elektromaros Líceum, Marosvásárhely            |
| Páll Rákhel Olga   | Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda       |
| Păcurar Mária      | Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár          |
| Simon József       | Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda    |
| Spier Tünde        | Csíky Gergely Nemzeti Kollégium, Arad          |
| Szilágyi Judit     | Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár      |
| Tomos Izabella     | Áprily Lajos főgimnázium, Brassó               |
| Ugron Szabolcs     | Benedek Elek Gimnázium, Nagybacon              |
| Zombori Gabriella  | Sapientia Tudományegyetem, Csíkszereda         |

# A versenyen részt vevő diákok névsora

## V. osztály

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Ambrus Egyed Ágnes    | János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár                    |
| Anderlik Patrik       | Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva                           |
| Bálint Tibor          | Iuliu Maniu Általános Iskola, Zilah                          |
| Bartalis Dorottya     | Nagy István Művészeti Líceum, Csíkszereda                    |
| Bíró Dániel           | Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár                    |
| Bogdán Ágnes          | Wesselényi Református Gimnázium, Zilah                       |
| Boros Csaba           | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti |
| Borsai Erwin          | Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva                           |
| Bront̄ Zsanett        | Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta                    |
| Csabai Anita          | 2. sz. Általános Iskola, Brassó                              |
| Csibi Alexandra       | Nagy Imre Általános Iskola, Csíkszereda                      |
| Csiszér Bence         | Nagy Imre Általános Iskola, Csíkszereda                      |
| Csutak Dávid          | Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy                     |
| Erdei Roland          | Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad                         |
| Fodor Orsolya Szilvia | Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva                           |
| Fodor Timea           | Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda                  |
| Gittinger András      | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti |
| Havas Panna           | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti |
| Hosszú Zsolt          | 2. sz. Általános Iskola, Brassó                              |
| Ilyés Anna Boróka     | Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár               |
| Jakab Etele           | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely                |
| Jakab Lóránd          | Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár                        |
| Józsa Kriszta         | Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó                             |
| Kelemen Attila        |  |
| Botond                | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely                |
| Kiss Andrea Tímea     | Konsza Samu Általános Iskola,<br>Nagybacon (Kovászna)        |
| Kohán Zsófia          | Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad                         |
| Krecht Ábel           | Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy                     |
| Kristó Roland         | Liviu Rebreanu Általános Iskola, Csíkszereda                 |
| Lőrincz Bálint Imre   | 16. sz. Általános Iskola, Nagyvárad                          |
| Lőrincz Róbert        | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti |

Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematikaversenye  
Nagyvárad, 2013. március 1 - 3.

---

|                              |  |
|------------------------------|--|
| Ludász Norbert               | 11. sz. Általános Iskola, Nagyvárad                          |
| Magdó Lehel                  | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely                |
| Mészáros Leticia             | Csiky Gergely Főgimnázium, Arad                              |
| Miklós Csenge                | Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy                     |
| Miklós Dóra                  | Székely Mózes Általános Iskola, Lövéte (Hargita)             |
| Mózsa Attila                 | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely                |
| Nagy Zsolt                   | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti |
| Naschauer Kinga              | Csiky Gergely Főgimnázium, Arad                              |
| Ördög Hunor                  | Florea Bogdan Általános Iskola, Szászrégen                   |
| Pallai Hunor                 | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti |
| Pásztor Kristóf              | Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad                         |
| Pop Kriszta                  | Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya                    |
| Posta Csanád                 | Palló Imre Művészeti Líceum, Székelyudvarhely                |
| Pricop Annamária             | Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár                        |
| Roth Apor                    | Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy                     |
| Simon Katalin                | Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest                          |
| Spir Rebeka Petra            | Csiky Gergely Főgimnázium, Arad                              |
| Szabó Thalmeiner<br>Bence    | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti |
| Szász Zsolt                  | Gaál Mózes Általános Iskola, Barót                           |
| Szegedi Dóra                 | Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest                          |
| Tők Dietrich Norbert         | Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy                     |
| Trombitas Dorottya           | Általános Iskola, Árpástó (Beszterce-Naszód)                 |
| Vásárhelyi Erik<br>Krisztián | 16. sz. Általános Iskola, Nagyvárad                          |
| Vinczi Márk Levente          | Báthory István Általános Iskola, Medgyes                     |
| Zboray Dávid                 | Dimitrie Cantemir Általános Iskola, Nagyvárad                |
| Zsebe Adél                   | 11. sz. Általános Iskola, Nagyvárad                          |

## VI. osztály

|                     |   |
|---------------------|---|
| Balázs-Bécsi Anna   | Nagy István Művészeti Líceum, Csíkszereda       |
| Bányai Csaba Roland | Általános Iskola, Csíkfalva (Maros)             |
| Berkecz Réka        | Orbán Balázs Általános Iskola, Székelyudvarhely |
| Bonczidai Zenkő     | 2. sz. Általános Iskola, Brassó                 |
| Boris Diana         | 2. sz. Általános Iskola, Brassó                 |
| Daczó Dávid         | Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy        |
| Darlaczi Zoltán     | Általános Iskola, Szentmáté (Beszterce-Naszód)  |

Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematikaversenye  
Nagyvárad, 2013. március 1 - 3.

---

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| Deák Gellért<br>Gedeon      | Kőrösi Csoma Sándor Gimnázium, Kovászna                       |
| Deák Izabella               | Dani Gergely Általános Iskola, Gyimes (Bákó)                  |
| Erdei Csongor               | Miskolczy Károly Általános Iskola, Micske (Bihar)             |
| Fazakas Borbála             | Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár                     |
| Fazekas Dóra Adél           | Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta                     |
| Filep Lilla                 | Arany János Elméleti Líceum , Nagyszalonta                    |
| Füstös Ferenc               | Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár                     |
| Gál Krisztina               | Fogarasy Mihály Általános Iskola,<br>Gyergyószentmiklós       |
| Garfield Adrienne           | János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár                     |
| Hölgyes Orsolya             | Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár                     |
| Kaszta Tamás                | Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya                     |
| Kelemen Hunor               | Miskolczy Károly Általános Iskola, Micske (Bihar)             |
| Kovács Róbert Jenő          | János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár                     |
| Kozman Botond               | Petőfi Sándor Általános Iskola, Kézdivásárhely                |
| Kurunczi Viktória           | Csiky Gergely Főgimnázium, Arad                               |
| Kutnik Andrea Virág         | Általános Iskola, Zimándújfalú (Arad)                         |
| Lukács Márton Örs           | Nagy István Művészeti Líceum, Csíkszereda                     |
| Márton Vazul                | Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda                   |
| Máté Dávid                  | Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár                         |
| Nagy Anita Enikő            | Gaal Mózes Általános Iskola, Barót                            |
| Nagy Örs                    | Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely                       |
| Péter Anna Fanni            | S. Illyés Lajos Általános Iskola, Szováta                     |
| Péter István                | Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda                   |
| Popa-Müller<br>Victor Dávid | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely                 |
| Portik Ábel                 | S. Illyés Lajos Általános Iskola, Szováta                     |
| Sallai Tamás Levente        | Simion Bărnuțiu Általános Iskola, Zilah                       |
| Szabo Eszter                | 10. sz. Általános Iskola, Szatmárnémeti                       |
| Tamás Nándor Károly         | Kelemen Didák Általános Iskola,<br>Kézdialmás (Kovászna)      |
| Tankó Tamás                 | Tivai Nagy Imre Szakközépiskola,<br>Csíkszentmárton (Hargita) |
| Tempfli Levente             | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti  |
| Vajnay Dorottya             | 10. sz. Általános Iskola, Szatmárnémeti                       |
| Váradi Csaba Béla           | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely                 |
| Varga Matild Katalin        | Simion Bărnuțiu Általános Iskola, Zilah                       |

Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematikaversenye  
Nagyvárad, 2013. március 1 - 3.

---

Vass Annamária Réka      Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya  
Vezenyi Ákos              Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad  
Virág Thekla Mária        Dani Gergely Általános Iskola, Gyimes (Bákó)

## VII. osztály

|                        |   |
|------------------------|---|
| Agócs Henrietta        | Horváth János Elméleti Líceum, Margitta                       |
| Bagi Nóra              | Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta                     |
| Bakó Bence             | Várad József Általános Iskola, Sepsiszentgyörgy               |
| Bálint Hunor           | Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy                      |
| Baranyai István        | 10. sz. Általános Iskola, Szatmárnémeti                       |
| Bartis Zsolt           | Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda                            |
| Beke Viktória Kincső   | Horváth János Elméleti Líceum, Margitta                       |
| Béres-Duha Csongor     | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely                 |
| Berszán Gréta          | 2. sz. Általános Iskola, Brassó                               |
| Bokor Zalán            | Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár                         |
| Buzogány Szabolcs      | Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár                     |
| Chiş Robert Lucian     | Andrei Mureşanu Főgimnázium, Beszterce                        |
| Dáni Eszter            | Nagy Mózes Gimnázium, Kézdivásárhely                          |
| Drohobeczky Orsolya    | János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár                     |
| Gonczel Roland         | Andrei Mureşanu Főgimnázium, Beszterce                        |
| Hegyí Boglárka         | Csiky Gergely Főgimnázium, Arad                               |
| Iuhász Erik            | Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad                          |
| Kacsó Péter Gábor      | Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest                           |
| Katona Bugner Attila   |   |
| Krisztián              | Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár                |
| Köllő Zsolt            | Köllő Miklós Általános Iskola,<br>Gyergyócsomafalva (Hargita) |
| Laczkó Kata            | Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely                       |
| Majla Nándor           | Benedek Elek Gimnázium, Székelyudvarhely                      |
| Mares Hanna Blanka     | Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya                     |
| Miheler Péter          | Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad                          |
| Molnar Tas Szilveszter | 1. sz. Általános Iskola, Marosludas                           |
| Moriczi Sándor         | Általános Iskola, Szentmáté (Beszterce-Naszód)                |
| Muszka Zsuzsa          | 1. sz. Általános Iskola, Nagykaroly                           |
| Nagy Edward Szilárd    | 15. sz. Általános Iskola, Brassó                              |
| Ördög Ákos             | József Attila Általános Iskola, Csíkszereda                   |
| Orosz Kelemen          | Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár                         |
| Portik Kriszta         | Florea Bogdan Általános Iskola, Szászrégen                    |
| Sallai Henrietta       | Avram Iancu Sportiskola, Zilah                                |



Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematikaversenye  
Nagyvárad, 2013. március 1 - 3.

---

|   |  |
|---|--|
| Schram István<br>Skapinyák Szilárd  | Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely<br>Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti  |
| Soós Márton   | Zajzoni Rab István Elméleti Líceum,<br>Négyfalu (Brassó)   |
| Soós Roland<br>Stekbauer Hanzi Réka<br>Stelczner Norbert<br>Szabó Liza<br>Szász Helga<br>Szász Tamás<br>Széles Roland Edvin<br>Udvari Róbert<br>Vinczi Richárd<br>Zsámbók Emese Mária | Simion Bărnuțiu Általános Iskola, Zilah<br>Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy<br>Corvin Mátyás Kollégium, Vajdahunyad<br>Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár<br>Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya<br>Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár<br>Simion Bărnuțiu Általános Iskola, Zilah<br>Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva<br>Báthory István Általános Iskola, Medgyes<br>Általános Iskola, Zimándújfaló (Arad) |

### VIII. osztály

|   |  |
|---|--|
| Antal Ildikó<br>Baja Zsolt  | Báthory István Általános Iskola, Medgyes<br>Baczkamadarasi Kis Gergely Református<br>Gimnázium, Székelyudvarhely   |
| Bold Barbara Bianca<br>Csóti Zselyke<br>Mariann   | Általános Iskola, Zimándújfaló (Arad)<br>Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda  |
| Csukás Bálint<br>Daczó Melinda<br>Demény Andrea<br>Bernadett  | Arany János Elméleti Líceum , Nagyszalonta<br>Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó<br>Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda  |
| Demeter Hunor   | Baczkamadarasi Kis Gergely Református<br>Gimnázium, Székelyudvarhely   |
| Divin Péter<br>Fogarasi Zsigmond<br>Levente   | Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad<br>Brassai Sámuel Elméleti Líceum, Kolozsvár  |
| Gegő Csenge Beáta<br>Horváth Abigél<br>Kádár Attila<br>Kenéz Anna<br>Komlosi Róbert<br>Kovács Ferencz<br>Kutasi Enikő | 8. sz. Általános Iskola, Brassó<br>Molnár Józsiás Általános Iskola, Kézdivásárhely<br>Gaál Mózes Általános Iskola, Barót<br>Arany János Elméleti Líceum , Nagyszalonta<br>Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya<br>Szacsvey Imre Általános Iskola, Nagyvárad<br>Mihai Eminescu Főgimnázium, Petrozsény |

Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematikaversenye  
Nagyvárad, 2013. március 1 - 3.

---

|                     |  |
|---------------------|--|
| Lukács Áron Zsolt   | Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda                                   |
| Majoros Máté        | Szacs vay Imre Általános Iskola, Nagyvárad                           |
| Mastan Lorena Eliza | Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya                            |
| Medgyesi Attila     | Gaál Mózes Általános Iskola, Barót                                   |
| Mihály Eszter       | Bükki Általános Iskola, Gyimesbükk (Bákó)                            |
| Nagy Obed Benjámin  | Simion Bărnuțiu Általános Iskola, Zilah                              |
| Péterfi Orsolya     | 2. sz. Általános Iskola, Marosvásárhely                              |
| Sarga Angéla        |  |
| Bernadett           | Felsőbányai Műszaki Iskola, Felsőbánya                               |
| Scheffler Barna     | Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum,<br>Szatmárnémeti         |
| Simó Andrea Ildikó  | 15. sz. Általános Iskola, Brassó                                     |
| Soós Tímea          | Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár                            |
| Stelczner Brigitta  | Corvin Mátyás Kollégium, Vajdahunyad                                 |
| Szabó Ágnes         | Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely                        |
| Szabó Zoltán        | Általános Iskola, Magyardécs (Beszterce-Naszód)                      |
| Szallós Kis Csaba   | Brassai Sámuel Elméleti Líceum, Kolozsvár                            |
| Székely Gyöngyike   | Kelemen Didák Általános Iskola,<br>Kézdivármás (Kovászna)            |
| Szőcs Marianna      | Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely                              |
| Talpă Diana         | Petőfi Sándor Általános Iskola, Kézdivásárhely                       |
| Tamás Andrea        | Kelemen Didák Általános Iskola,<br>Kézdivármás (Kovászna)            |
| Tankó Gábor Tihamér | Majláth Gusztáv Károly Általános Iskola,<br>Gyimesközéplek (Hargita) |
| Tőtős György        | Simion Bărnuțiu Általános Iskola, Zilah                              |
| Vitus Regina        | Váradai József Általános Iskola, Sepsiszentgyörgy                    |

## Szervezők

|                         |                                     |
|-------------------------|-------------------------------------|
| Szabó Csilla,           | tanügyminisztériumi tanácsos        |
| Kéry Hajnal,            | Bihar megyei tanfelügyelőség        |
| Farkas Tünde,           | Bihar megyei tanfelügyelőség        |
| Vad Márta,              | Bihar megyei tanfelügyelőség        |
| Pásztor Gabriella,      | Szacsvay Imre Általános Iskola      |
| Kecse Gabriella,        | Szacsvay Imre Általános Iskola      |
| Nagy Enikő,             | Szent László Római Katolikus Líceum |
| Pálhegyi Farkas László, | Mihai Eminescu Nemzeti Kollégium    |
| Nagy Gyöngyi,           | Szacsvay Imre Általános Iskola      |
| Molnár Tünde,           | Szacsvay Imre Általános Iskola      |

## A feladatok szerzőinek névjegyzéke

Bencze Mihály, Brassó, 8, 12, 30, 52

Durugy Erika, Torda, 8, 28

Gagyi Dénes, Székelykeresztúr, 8, 26

Nagy Örs, Marosvásárhely, 13, 57

Nagy Jenő, Székelyudvarhely, 6, 15

Nagy Olga, Nagyszalonta, 10, 36

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti, 11, 12,  
39, 49

Pap Czier Levente, Nagykároly, 6, 16

Róka Sándor, Nyíregyháza, 6, 8, 12,  
19, 29, 47

Simon József, Csíkszereda, 10, 11, 13,  
37, 40, 53

SimpleX Egyesület, Csíkszereda, 7, 9,  
11–13, 21, 24, 32, 34, 42,  
44, 55

Szilágyi Emőke, Marosvásárhely, 6, 14